

Analyse et topologie

Dario Prandi

18 décembre 2019

Table des matières

1	Introduction	4
2	Espaces métriques et espaces vectoriels normés	5
2.1	Espaces métriques	5
2.1.1	Premiers exemples d'espaces métriques	5
2.2	Espaces vectoriel normées	7
2.2.1	Exemples d'evn	8
2.3	Exercices	12
3	Notions de topologie	13
3.1	Ensembles ouverts et topologie	13
3.2	Equivalence de métriques	16
3.3	Intérieur et adhérence	19
3.4	Exercices	21
4	Convergence et continuité	22
4.1	Propriétés de la convergence	22
4.2	Les notions topologiques à travers la convergence	23
4.2.1	Équivalence topologique et suites	25
4.2.2	Densité dans un espace métrique	26
4.3	Continuité dans un espace métrique	27
4.3.1	Uniforme continuité et applications Lipschitziennes	30
4.4	Exercices	32
5	Complétude et le théorème du point fixe	35
5.1	Suites de Cauchy	35
5.2	Espaces complets	36
5.2.1	Complétude des exemples	38
5.3	Le théorème de point fixe et ses applications	41
5.3.1	La suite de Fibonacci et le nombre d'or	43
5.4	Exercices	45
6	Compacité	47
6.1	Compacité séquentielle et ses propriétés	47
6.2	Continuité et compacité	49
6.3	Précompacité et propriété de Borel-Lebesgue	50
6.4	Compacité dans les evn	54
6.5	Exercices	56

7	Espaces des fonctions : les théorèmes de Weierstrass et d'Ascoli	58
7.1	Théorème de Weierstrass	58
7.2	Théorème d'Ascoli	61
7.3	Exercices	63
8	Connexité	65
8.1	Connexité par arcs	65
8.2	Connexité	66
8.2.1	Connexité et connexité par arcs	67
8.3	Exercices	71
9	Applications linéaires et continuité	73
9.1	Exercices	79

1 Introduction

Ce cours présente les concepts fondateurs de la Topologie et de l'Analyse Fonctionnelle. Pour écrire ce polycopie je me suis fortement inspiré des polycopiés [1, 4]. Je suggère aussi de consulter l'ouvrage [3].

2 Espaces métriques et espaces vectoriels normés

2.1 Espaces métriques

Définition 2.1. Soit X un ensemble non vide. Une *distance* (ou *métrique*) sur X est une application

$$d : X \times X \rightarrow [0, +\infty), \quad (2.1)$$

qui satisfait les propriétés suivantes :

1. Coïncidence : Pour tout $x, y \in X$ on a $d(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$;
2. Symétrie : Pour tout $x, y \in X$ on a $d(x, y) = d(y, x)$;
3. Inégalité triangulaire : Pour tout $x, y, z \in X$ on a

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z). \quad (2.2)$$

La couple (X, d) , où d est une distance sur X , est dite *espace métrique*. Aussi, on dit que $d(x, y)$ est la distance entre les points x et y .

Remarque 2.1. Par définition une distance doit satisfaire $d(x, y) < +\infty$ pour tout $x, y \in X$.

Remarque 2.2 (Sous-espace métriques). Soit (X, d) un espace métrique et $Y \subset X$ une de ses parties. On dénote par $d|_Y : Y \times Y \rightarrow [0, +\infty)$ la restriction de d à $Y \times Y$. On vérifie aisément que $d|_Y$ est une distance sur Y . L'espace métrique $(Y, d|_Y)$ est dit être un *sous-espace métrique* de (X, d) .

2.1.1 Premiers exemples d'espaces métriques

En premier lieu, nous montrons que tout ensemble non vide X admet une métrique, dite triviale ou discrète.

Exemple 2.1 (Métrique discrète). Soit X un ensemble non vide. La *métrique discrète* sur X est définie par

$$d_{\text{discr}}(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y; \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.3)$$

Voici l'exemple qui motive la définition d'espace métrique.

Exemple 2.2 (Métrique standard sur \mathbb{R}). On considère l'ensemble \mathbb{R} des nombres réels, et on pose $d_s(a, b) = |a - b|$ pour tout $a, b \in \mathbb{R}$. C'est évident que $d_s : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ et on vérifie aisément qu'elle satisfait les propriétés de coïncidence et symétrie. Finalement, l'inégalité triangulaire est une conséquence du fait que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ on a $|a + b| \leq |a| + |b|$. En effet, ceci implique que pour tout $x, y, z \in \mathbb{R}$ on a

$$d_s(x, z) = |x - z| = |x - y + y - z| \leq |x - y| + |y - z| = d_e(x, y) + d_e(y, z). \quad (2.4)$$

Donc, d_s est une métrique sur \mathbb{R} et (\mathbb{R}, d_s) est un espace métrique.

Jusqu'à maintenant on a regardé des exemples qu'on connaissais déjà . Les prochains deux exemples, par contre, nous montrent que pour le même ensemble ils existent y a beaucoup de distances différentes.

Exemple 2.3 (α -métriques sur \mathbb{R}). On considère la ligne réel \mathbb{R} . Pour $\alpha \in (0, 1]$, on définit $d_\alpha : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ par

$$d_\alpha(x, y) = |x - y|^\alpha, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (2.5)$$

Bien sur, $d_1 = d_s$ de l'Exemple 2.2. Le premier deux propriétés de la définition de métrique sont banalement satisfaites, donc, pour vérifier que d_α est une métrique, il suffit de montrer l'inégalité triangulaire.

En posant $a = x - y$ et $b = y - z$, ceci revient à montrer que pour tout $a, b > 0$ on a $(a + b)^\alpha \leq a^\alpha + b^\alpha$. Comme $f(t) = t^\alpha$ est une fonction concave¹ pour $\alpha \in (0, 1]$, on pose λ tel que $a = (1 - \lambda)(a + b)$. C'est immédiat de vérifier que donc $b = \lambda(a + b)$. En utilisant la concavité de f on a

$$a^\alpha = f(a) = f(\lambda \cdot 0 + (1 - \lambda)(a + b)) \geq (1 - \lambda)(a + b)^\alpha, \quad (2.6)$$

$$b^\alpha = f(b) = f(\lambda(a + b) + (1 - \lambda) \cdot 0) \geq \lambda(a + b)^\alpha. \quad (2.7)$$

En sommant ces deux inégalité on obtient le résultat.

On vérifiera comme exercice que si $\alpha > 1$ alors l'application d_α n'est pas une métrique.

Exemple 2.4 (Espace de Baire). On considère l'espace des suites à valeurs entiers :

$$\mathbb{N}^{\mathbb{N}} = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid x_n \in \mathbb{N}\}. \quad (2.8)$$

La *métrique de Baire* sur cet espace est $d_B : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \rightarrow [0, +\infty)$ définie par

$$d_B((x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}, \\ 2^{-\min\{m \in \mathbb{N} \mid x_m \neq y_m\}} & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.9)$$

Par exemple, si on considère les suites $x = (1, 1, 1, \dots)$ et $y = (1, 1, 1, 2, 3, 1, 1, \dots)$ on a $d_B(x, y) = 2^{-3} = 1/8$.

Les premières deux propriétés de la définition de métrique sont banalement satisfaites. On vérifie l'inégalité triangulaire. Soient, $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $z = (z_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

1. C.-à -d. tel que $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$ pour tout $x, y > 0$ et $\lambda \in [0, 1]$.

L'inégalité triangulaire est banalement vérifiée si $x = z$, donc on suppose que $x \neq z$ et que $d_B(x, z) = 2^{-k}$ pour un certain $k \in \mathbb{N}$. En particulier cela implique que $x_m = z_m$ pour tout $m < k$ et que $x_k \neq z_k$. Donc, on a que $x_k \neq y_k$ ou $z_k \neq y_k$. Comme $2^{-k} \leq 2^{-m}$ si $m \leq k$, cela implique que

$$d_B(x, z) \leq \max \{d_B(x, y), d_B(y, z)\}. \quad (2.10)$$

Cette propriété (appelée *inégalité ultratriangulaire*) est clairement plus forte que l'inégalité triangulaire. En effet, une métrique qui satisfait (2.10) est dite être une *ultramétrie*.

2.2 Espaces vectoriel normés

Une classe très importante d'espaces métriques est obtenue en introduisant la notion de norme pour un espace vectoriel. Dans ce cours on considérera que des espaces \mathbb{R} -vectoriels ou \mathbb{C} -vectoriels.

Définition 2.2. Soit E un espace \mathbb{K} -vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Une *norme* pour E est une application

$$\mathbf{n} : E \rightarrow [0, +\infty), \quad (2.11)$$

qui satisfait les propriétés suivantes :

1. Positivité : Pour tout $v \in E$, on a $\mathbf{n}(v) = 0$ si et seulement si $v = 0_E$;
2. Homogénéité : Pour tout $v \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ on a $\mathbf{n}(\lambda v) = |\lambda| \mathbf{n}(v)$;
3. Inégalité triangulaire : Pour tout $v, w \in E$ on a $\mathbf{n}(v + w) \leq \mathbf{n}(v) + \mathbf{n}(w)$.

La couple (E, \mathbf{n}) est dite un *espace vectoriel normé* (evn). Aussi, on note souvent $\mathbf{n}(v) = \|v\|$ ou $\mathbf{n}(v) = \|v\|_E$.

On peut interpréter une norme comme une notion de longueur pour les vecteurs de E . Ainsi, la positivité nous dit que le seul vecteur de longueur 0 est le vecteur nul et l'homogénéité nous garantis que cette longueur rescale d'une façon compatible avec la structure d'espace vectoriel.

Tous evn ont une structure métrique canoniquement associée.

Théorème 2.1 (Métrique associé à une norme). Soit (E, \mathbf{n}) un evn. L'application $d_{\mathbf{n}} : E \times E \rightarrow [0, +\infty)$ définie par

$$d_{\mathbf{n}}(x, y) = \mathbf{n}(x - y), \quad \forall x, y \in E, \quad (2.12)$$

est une métrique, dite métrique associé à la norme \mathbf{n} .

Démonstration. La positivité de \mathbf{n} implique immédiatement la coïncidence de $d_{\mathbf{n}}$. Ainsi, par homogénéité de \mathbf{n} , on a

$$d_{\mathbf{n}}(x, y) = \mathbf{n}(x - y) = \mathbf{n}(-(y - x)) = \mathbf{n}(y - x) = d_{\mathbf{n}}(y, x), \quad (2.13)$$

et donc $d_{\mathbf{n}}$ est symétrique. Finalement, grâce à l'inégalité triangulaire pour \mathbf{n} on obtient celle pour $d_{\mathbf{n}}$ de la même façon que dans l'Exercice 2.2. \square

Remarque 2.3. La distance standard sur \mathbb{R} , introduite dans l'Exemple 2.2, est associée à la norme $\mathbf{n}(v) = |v|$ pour $v \in \mathbb{R}$. Toutefois, si $\alpha < 1$, les α -métriques de l'Exemple 2.3 ne sont associées à aucune norme. En effet, si $d_\alpha(x, y) = \mathbf{n}(x - y)$ on aurait

$$n(\lambda v) = d_\alpha(\lambda v, 0) = |\lambda v|^\alpha = |\lambda|^\alpha d_\alpha(v, 0) = |\lambda|^\alpha \mathbf{n}(v), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}, \quad (2.14)$$

ce qui contredirait l'homogénéité de \mathbf{n} .

Un des points clefs de ce cours est de saisir les différences entre les espaces vectoriels de dimension finie et ceux de dimension infinie. En particulier, on est intéressé à comprendre jusqu'à où l'intuition "fini-dimensionnel" s'étend à la dimension infinie.

2.2.1 Exemples d'evn

Soit E un espace vectoriel. On rappelle qu'une famille génératrice pour E est une partie finie $\mathcal{F} \subset E$ de vecteurs tels que si on pose $\mathcal{F} = (e_1, \dots, e_n)$ on a que

$$\forall v \in E \quad \exists \gamma_1, \dots, \gamma_n \in \mathbb{K} \quad \text{t.q.} \quad v = \sum_{i=1}^n \gamma_i e_i. \quad (2.15)$$

On définit alors

$$\dim E = \inf \{n \mid \text{il existe une famille génératrice de cardinalité } n\}. \quad (2.16)$$

Espaces de dimension finie : les p -normes

Soit E un evn tel que $\dim E = n < +\infty$. Nous commençons par montrer qu'il existe toujours un isomorphisme (non canonique) entre E et \mathbb{R}^n .

En effet, nous pouvons trouver une *base* de E , c.-à -d. une famille génératrice libre, qu'on dénotera $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Ceci nous permet de définir l'application suivante :

$$\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow E, \quad \Phi(x) = \sum_{i=1}^n x_i e_i. \quad (2.17)$$

Cette application est trivialement linéaire. En plus, elle est injective, car \mathcal{B} est libre, et surjective, car \mathcal{B} est une famille génératrice. Donc Φ est un isomorphisme entre E et \mathbb{R}^n .

Dans la suite nous allons assumer d'avoir fixé une base, et donc nous identifierons E avec \mathbb{R}^n .

Définition 2.3. Soit $p \in [1, +\infty]$. La p -norme sur \mathbb{R}^n est l'application $\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty)$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, par :

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}, \quad \text{si } p < +\infty, \quad \text{et} \quad \|x\|_\infty = \max_{i \in [1, n]} |x_i|. \quad (2.18)$$

Théorème 2.2. Pour tout $p \in [1, +\infty]$, l'application $\|\cdot\|_p$ est une norme.

Démonstration. C'est claire que $\|0\|_p = 0$. De plus, si $\|x\|_p = 0$, comme $|x_i| \geq 0$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ on a que $x_i = 0$ et donc $x = 0$. Ceci prouve la positivité.

Pour prouver l'homogénéité on fixe $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$, et on calcule, pour $p < +\infty$,

$$\|\lambda x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |\lambda x_i|^p \right)^{1/p} = \left(\sum_{i=1}^n |\lambda|^p |x_i|^p \right)^{1/p} = |\lambda| \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} = |\lambda| \|x\|_p. \quad (2.19)$$

Le cas $p = +\infty$ est similaire.

Finalement, l'inégalité triangulaire dans le cas $p = +\infty$ suit par

$$\|x + y\|_\infty \leq \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} (|x_i| + |y_i|) \leq \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} |x_i| + \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} |y_i| = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty. \quad (2.20)$$

Le cas $p < +\infty$ est plus compliqué et il est montré dans le Lemme 2.4. \square

Pour montrer l'inégalité triangulaire, on a besoin du résultat suivant.

Lemma 2.3 (Inégalité de Hölder). *Soient $p, q \in [1, +\infty)$ tels que $1/p + 1/q = 1$. Alors,*

$$\sum_{i=1}^n |x_i| |y_i| \leq \|x\|_p \|y\|_q, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n. \quad (2.21)$$

Démonstration. Nous commençons par montrer l'inégalité de Young pour les produits :

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \quad \forall a, b > 0. \quad (2.22)$$

À cet effet, on pose $\lambda = 1/p$ (et donc $1 - \lambda = 1/q$). Par concavité du logarithme, on a

$$\log(\lambda a^p + (1 - \lambda)b^q) \geq \lambda \log(a^p) + (1 - \lambda) \log(b^q) = \log a + \log b = \log(ab). \quad (2.23)$$

Par monotonie de la fonction exponentielle, ceci prouve l'inégalité de Young.

On passe maintenant à prouver (2.21). Si $\|x\|_p = 0$ alors $x = 0$ et donc l'inégalité est satisfaite. De même est vrai si $\|y\|_q = 0$. On peut donc supposer que $\|x\|_p, \|y\|_q \neq 0$. De plus, en remplaçant x par $x/\|x\|_p$ et y par $y/\|y\|_q$ on voit qu'on peut aussi supposer $\|x\|_p = \|y\|_q = 1$. En utilisant (2.22), on a donc

$$|x_i| |y_i| \leq \frac{|x_i|^p}{p} + \frac{|y_i|^q}{q}, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}. \quad (2.24)$$

Sommant pour $i \in \{1, \dots, n\}$ on a donc

$$\sum_{i=1}^n |x_i| |y_i| \leq \frac{\|x\|_p^p}{p} + \frac{\|y\|_q^q}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad (2.25)$$

ce qui prouve l'énoncé. \square

Lemma 2.4 (Inégalité de Minkowski). *Soit $p \in [1, +\infty)$. Alors,*

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n. \quad (2.26)$$

Démonstration. En utilisant le fait que $|a + b| \leq |a| + |b|$ on a

$$\begin{aligned} \|x + y\|_p^p &= \sum_{i=1}^n |x_i + y_i| \cdot |x_i + y_i|^{p-1} \\ &\leq \sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|) \cdot |x_i + y_i|^{p-1} \\ &= \sum_{i=1}^n |x_i| \cdot |x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^n |y_i| \cdot |x_i + y_i|^{p-1} \end{aligned} \quad (2.27)$$

On va maintenant appliquer l'inégalité de Hölder. À cet effet, on observe que $q = (p-1)/p$ satisfait $1/p + 1/q = 1$. Donc,

$$\|x + y\|_p^p \leq (\|x\|_p + \|y\|_p) \left(\sum_{i=1}^n (|x_i + y_i|^{p-1})^{\frac{p}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}} = (\|x\|_p + \|y\|_p) \|x + y\|_p^{p-1}. \quad (2.28)$$

L'énoncé suit en divisant par $\|x + y\|_p^{p-1}$. \square

Espaces de dimension infinie

Dans ce cours on va considérer (principalement) les trois espaces vectoriels de dimensions infinies suivants :

1. L'espace des polynômes réels $\mathbb{R}[x]$;
2. L'espace $C([0, 1])$ des fonctions continues $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$;
3. L'espace $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Dans la suite on va considérer ces trois espaces et introduire des normes sur eux.

L'espace des polynômes On rappelle qu'un polynôme réel $P \in \mathbb{R}[x]$ est une fonction $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tel qu'ils existent $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$P(x) = \sum_{i=1}^n a_i x^i, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2.29)$$

Le degré de P est défini par

$$\deg P = \min \{m \in \mathbb{N} \mid a_i = 0 \forall i > m\}. \quad (2.30)$$

On montre aisément que l'espace des polynômes de degré inférieur ou égale à un entier fixé $N \in \mathbb{N}$ est isomorphe à \mathbb{R}^N , à travers l'isomorphisme

$$\Phi : P \mapsto (a_1, \dots, a_N) \in \mathbb{R}^N \quad (2.31)$$

En adaptant les preuves faites pour le cas de dimension finie, on peut donc démontrer facilement qu'on a les normes suivantes.

Définition 2.4. Soit $p \in [1, +\infty]$. La p -norme sur $\mathbb{R}[x]$ est l'application $\|\cdot\|_p : \mathbb{R}[x] \rightarrow [0, +\infty)$ définie, pour tout $P \in \mathbb{R}[x]$ tels que $P(x) = \sum_{i=0}^{\deg P} a_i x^i$, par :

$$\|P\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\deg P} |a_i|^p \right)^{1/p}, \quad \text{si } p < +\infty, \quad \text{et} \quad \|P\|_\infty = \max_{i \in [1, \deg P]} |a_i|. \quad (2.32)$$

L'espace des fonctions continues On note

$$C([0, 1]) = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ est continue}\}. \quad (2.33)$$

Ceci est un espace vectoriel si on pose pour $f, g \in C([0, 1])$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ que $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $(fg)(x) = f(x)g(x)$ et $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$, pour tout $x \in [0, 1]$. En particulier, le vecteur nul est la fonction nulle $f(x) = 0$ pour tout $x \in [0, 1]$. On étend aisément à cet espace aussi la notion de p -norme.

Définition 2.5. Soit $p \in [1, +\infty]$. La p -norme sur $C([0, 1])$ est l'application $\|\cdot\|_p : C([0, 1]) \rightarrow [0, +\infty)$ définie, pour tout $f \in C([0, 1])$, par

$$\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \quad \text{si } p < +\infty, \quad \|f\|_\infty = \max_{x \in [0, 1]} |f(x)|. \quad (2.34)$$

On peut en effet vérifier que le Lemmes 2.3 et 2.4 peuvent s'étendre pour démontrer l'inégalité triangulaire pour les norme ci-dessus. Comme l'homogénéité est banale, la seule chose à vérifier est la positivité, et en particulier le fait que $\|f\|_p = 0$ implique $f = 0$. Ce fait est immédiat pour $p = +\infty$. Si, par contre, $p < +\infty$ il suffit d'observer que $\|f\|_p = 0$ implique que $\int_0^1 |f(x)|^p dx = 0$. Comme $|f|^p$ est une fonction continue, on devrait déjà avoir vu que ceci implique $|f|^p \equiv 0$ et donc $f \equiv 0$.

L'espace des suites réels On verra plus tard qu'il n'existe pas une norme "raisonnable" sur l'espace $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Nous allons donc considérer les evn suivants.

Définition 2.6. Soit $p \in [1, +\infty]$. On considère l'application $\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \rightarrow [0, +\infty]$ définie par

$$\|(x_n)_{n \in \mathbb{N}}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{+\infty} |x_i|^p \right)^{1/p}, \quad \text{si } p < +\infty, \quad \text{et} \quad \|(x_n)_{n \in \mathbb{N}}\|_\infty = \max_{i \in [1, +\infty]} |x_i|. \quad (2.35)$$

L'espace $\ell^p(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ défini par

$$\ell^p(\mathbb{R}) = \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \|(x_n)_{n \in \mathbb{N}}\|_p < +\infty \right\}. \quad (2.36)$$

D'une façon similaire au cas de dimension finie on peut donc montrer que $(\ell^p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_p)$ est un evn pour tout $p \in [1, +\infty]$. Le point clefs pour étendre le Lemme 2.4 à ce cas est de montrer que si $x, y \in \ell^p(\mathbb{R})$ alors aussi $x + y \in \ell^p(\mathbb{R})$.

2.3 Exercices

Exercice 2.1. Montrer que pour $\alpha > 1$ la fonction d_α définie dans l'Exemple 2.3 n'est pas une métrique.

Exercice 2.2 (Métrique induite). Soient X un ensemble et (Y, d) un espace métrique. Supposons qu'il existe une injection $f : X \rightarrow Y$. Est facile de vérifier qu'on peut induire une métrique d_f sur X comme suit :

$$d_f(a, b) = d(f(a), f(b)), \quad \forall a, b \in X. \quad (2.37)$$

Exercice 2.3. Montrer que toute norme sur \mathbb{R} est de la forme $\mathbf{n}(x) = \gamma|x|$ pour $\gamma \in \mathbb{R}$.

Exercice 2.4 (Fonctions bornées). Soit (Y, d_Y) un espace métrique. Le diamètre d'une partie $A \subset Y$ est la quantité

$$\text{diam } A = \sup_{y_1, y_2 \in Y} d_Y(y_1, y_2). \quad (2.38)$$

Soit X un ensemble et considérons l'ensemble

$$\mathcal{B}(X, Y) = \{f : X \rightarrow Y \mid \text{diam}(f(X)) < +\infty\}. \quad (2.39)$$

Montrer que l'application $d_\infty(f, g) = \sup_{x \in X} d_Y(f(x), g(x))$, $f, g \in \mathcal{B}(X, Y)$ est une métrique sur $\mathcal{B}(X, Y)$. Montrer aussi que, si $Y = \mathbb{R}$ et $d_Y = d_s$, alors $\mathcal{B}(X, Y)$ est un espace vectoriel et d_∞ est associée à une norme.

Exercice 2.5. Étant donné un interval fermé $I \subset \mathbb{R}$ (ce qui comprends le cas $I = \mathbb{R}$), considérons l'espace

$$C^1(I) = \{f : I \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ continue, dérivable et } f' \text{ continue}\}. \quad (2.40)$$

1. Démontrer que $C^1(I)$ est un espace vectoriel.
2. Démontrer qu'en posant

$$\mathbf{n}(f) = |f(0)| + \int_I |f'(t)| dt, \quad f \in C^1(I), \quad (2.41)$$

on définit une norme sur $C^1(I)$ si $I = [a, b]$ avec $-\infty < a \leq 0 \leq b < +\infty$. Est-ce que le même résultat est vrai si $I = \mathbb{R}$?

3. Définit-on une norme sur $C^1(\mathbb{R})$ en posant

$$\mathbf{n}(f) = |f(0)| + \sup_{t \in \mathbb{R}} |f'(t)|, \quad \forall f \in C^1(I) \quad ? \quad (2.42)$$

3 Notions de topologie

Dans tout ce chapitre on supposera d'avoir fixé un espace métrique (X, d) .

3.1 Ensembles ouverts et topologie

Grace à la notion de distance on peut identifier les ensemble des points qui sont “proches” d'un point donné.

Définition 3.1. Soit $x \in X$ et $r > 0$. La *boule ouverte de rayon r et centre x* est l'ensemble

$$B(x, r) = \{y \in X \mid d(x, y) < r\}. \quad (3.1)$$

La *boule fermé de rayon r et centre x* est l'ensemble

$$\bar{B}(x, r) = \{y \in X \mid d(x, y) \leq r\}. \quad (3.2)$$

Exemple 3.1 (Boules dans \mathbb{R}). On considère (\mathbb{R}, d_s) où d_s est la distance standard donnée par la valeur absolue (voir Exemple 2.2). Dans ce cas, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $r > 0$, on a

$$B(x, r) = (x - r, x + r) \quad \text{et} \quad \bar{B}(x, r) = [x - r, x + r]. \quad (3.3)$$

C.-à -d., les boules ouvertes (resp. fermées) correspondent aux intervalles ouverts (resp. fermés).

Exemple 3.2 (Boules dans le plan). On va décrire les boules ouvertes de rayon $r > 0$ et centre $o = (0, 0)$ dans \mathbb{R}^2 , par rapport au différentes p -normes, $p \in [1, +\infty]$.

— $p = 2$: Dans ce cas, on a

$$B(o, r) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < r\}. \quad (3.4)$$

Donc, la boule correspond à l'intérieur du cercle de rayon r , privé de sa frontière.

— $p = +\infty$: Dans ce cas,

$$B(o, r) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \max\{|x_1|, |x_2|\} < r\}. \quad (3.5)$$

C.-à -d., la boule correspond à l'intérieur du carré dont le bord est délimité par les points $(\pm r, \pm r)$.

— $p = 1$: Dans ce cas,

$$B(o, r) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid |x_1| + |x_2| < r\}. \quad (3.6)$$

C.-à -d., la boule correspond à l'intérieur du carré dont le bord est délimité par les points $(\pm r, 0)$ et $(0, \pm r)$.

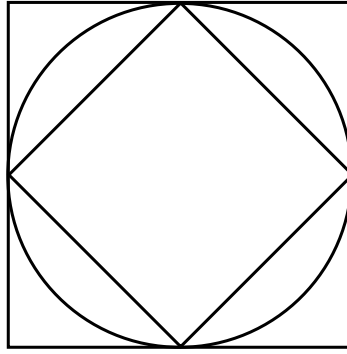


FIGURE 3.1 – Boules pour les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$.

Si on est intéressé aux boules fermés, il suffira (dans ce cas particulier) de rajouter la frontière aux boules ouvertes. À titre de comparaison, on a tracé en Figure 3.1 dans un même repère les frontières de ces trois boules.

Le prochain exemple montre qu'on doit faire très attention avec la notion de boule : Même si on les appelle "boules" elle n'ont rien de rond, et en plus, il peut y avoir une différence énorme entre la boule fermée et la boule ouverte du même centre et rayon.

Exemple 3.3 (Boules pour la distance discrète). Soit X un ensemble quelconque, avec la métrique discrète introduite dans l'Exemple 2.1. Pour $x \in X$ on a donc :

$$B(x, r) = \begin{cases} \{x\} & \text{si } r \leq 1, \\ X & \text{si } r > 1, \end{cases} \quad \bar{B}(x, r) = \begin{cases} \{x\} & \text{si } r < 1, \\ X & \text{si } r \geq 1. \end{cases} \quad (3.7)$$

En particulier, $B(x, 1) = \{x\}$ tandis que $\bar{B}(x, 1) = X$!

Grace à la notion de boules, on peut introduire la notion d'ensemble ouvert et fermé.

Définition 3.2. Soit A une partie de X . On dit que

- $x \in X$ est un *point intérieur* à A s'il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset A$;
- A est *ouvert* si tout $a \in A$ est intérieur à A ;
- A est *fermé* si $X \setminus A$ est ouvert.

Tout boule ouverte constitue une partie ouverte de l'espace. De même, tout boule fermée est une partie fermée de l'espace (voire Exercice 3.1).

Exemple 3.4 (Ouverts pour la métrique discrète). Soit (X, d_{discr}) un espace métrique muni de la distance discrète. Alors, toute partie de X est ouverte. En effet, si $A \subset X$ tous $x \in A$ est intérieur, car $B(x, 1/2) = \{x\} \subset A$.

Exemple 3.5 (Ouverts de \mathbb{R}). D'après l'Exemple 3.1, la description très simple des boules ouvertes dans le cas de (\mathbb{R}, d_s) , permet de montrer aisément que tous les intervalles ouverts $(a, b) \subset \mathbb{R}$ sont ouverts et que tous les intervalles fermés $[a, b] \subset \mathbb{R}$ sont fermés. De plus, les ouverts dans (\mathbb{R}, d_s) sont complètement caractérisés comme les réunions dénombrables d'intervalles ouverts (voire Exercice 3.2).

Le propriétés suivantes sont essentielles.

Proposition 3.1 (Propriétés des ouverts). *Soit (X, d) un espace métrique. Alors :*

- i. X et \emptyset sont ouverts ;*
- ii. Si A_1, A_2, \dots, A_n sont ouverts, alors $\bigcap_{i=1}^n A_i$ est ouvert ;*
- iii. Soit I un ensemble quelconque d'indices. Si $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$ est une famille d'ouverts, alors $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ est ouvert.*

Démonstration. Le premier point est une conséquence immédiate de la définition. D'autre part, pour montrer le deuxième point, c'est évident qu'il suffit de le démontrer pour $n = 2$. En effet, le cas général suivra à travers un raisonnement par récurrence. Soient donc A_1 et A_2 deux parties ouvertes de X et soit $x \in A_1 \cap A_2$. Comme $x \in A_1$, il existe $r_1 > 0$ tel que $B(x, r_1) \subset A_1$. Au même temps, comme $x \in A_2$, il existe aussi $r_2 > 0$ tel que $B(x, r_2) \subset A_2$. Vu que par définition de boules ouvertes on a $B(x, \rho) \subset B(x, \rho')$ si $\rho \leq \rho'$, on a donc que $B(x, \min\{r_1, r_2\}) \subset A_1 \cap A_2$, ce qui démontre que x est un point intérieur, et donc que $A_1 \cap A_2$ est ouvert.

Pour terminer, on montre le dernier point. Soit $x \in \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ et montrons qu'il est un point intérieur. Par définition de réunion, il existe $\bar{\alpha}$ tel que $x \in A_{\bar{\alpha}}$. Comme $A_{\bar{\alpha}}$ est ouvert, il existe $r > 0$

$$B(x, r) \subset A_{\bar{\alpha}} \subset \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha. \quad (3.8)$$

□

Remarque 3.1. L'intersection d'une quantité infinie d'ensemble ouverts n'est pas forcément ouverte ! Il suffit de considérer $A_n = (0, 1 + 1/n)$, $n \in \mathbb{N}$. On voit facilement que chaque A_n est ouvert, toutefois on a

$$A_\infty = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = (0, 1]. \quad (3.9)$$

Or, A_∞ n'est pas ouvert, car $1 \in A_\infty$ n'est pas un point intérieur. En effet, pour $r > 0$ on a $B(1, r) = (1 - r, 1 + r) \not\subset A_\infty$.

En passant aux complémentaires dans la Proposition 3.2, on obtient les propriétés correspondants pour les fermés.

Proposition 3.2 (Propriétés des fermés). *Soit (X, d) un espace métrique. Alors :*

- i. X et \emptyset sont fermés ;*
- ii. Si A_1, A_2, \dots, A_n sont fermés, alors $\bigcup_{i=1}^n A_i$ est fermé ;*
- iii. Soit I un ensemble quelconque d'indices. Si $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$ est une famille de fermés, alors $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$ est fermé.*

La notion d'ouvert est essentielle, tant qu'il existe une branche des mathématiques (la *Topologie*) dédiée à les étudier. Notamment, comme on a fait pour la notion de métrique par rapport à la distance euclidienne, est possible détacher la notion d'ensemble ouvert de la métrique. En effet, est possible obtenir une bonne partie des résultats de ce cours tout simplement en se donnant une famille d'ensembles (qu'on appelle ouverts) qui satisfont les propriétés de la Proposition 3.2. Plus précisément :

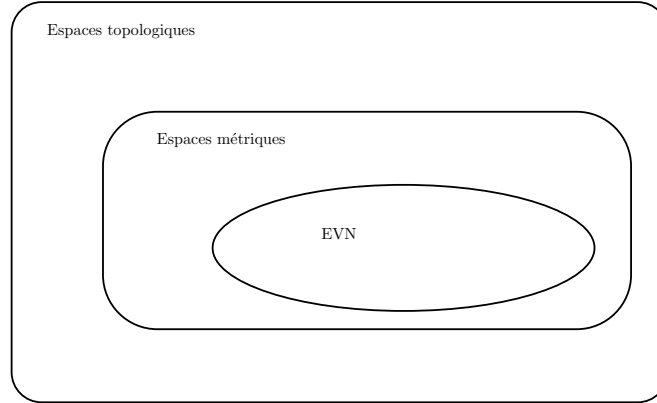


FIGURE 3.2 – Les espaces introduits dans ce cours.

Définition 3.3. Une famille \mathfrak{T} de parties de X (i.e., $\mathfrak{T} \subset 2^X$) est une *topologie* pour X si

- i. $X, \emptyset \in \mathfrak{T}$;
- ii. \mathfrak{T} est fermée par intersection finie :

$$A_1, \dots, A_n \in \mathfrak{T} \implies \bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathfrak{T}; \quad (3.10)$$

- iii. \mathfrak{T} est fermée par réunion arbitraire :

$$(A_\alpha)_{\alpha \in I} \subset \mathfrak{T} \implies \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \in \mathfrak{T}. \quad (3.11)$$

Un *espace topologique* est une couple (X, \mathfrak{T}) où \mathfrak{T} est une topologie pour X . Les éléments de \mathfrak{T} sont les ouverts de (X, \mathfrak{T}) .

La topologie définie par la Définition 3.2 est dite *topologie associée à la métrique* d , et souvent noté par \mathfrak{T}_d .

En Figure 3.2 on résume la structure des topologies d'espaces que nous avons introduit jusqu'à maintenant.

3.2 Equivalence de métriques

Dans cette section on considère deux distances d_1 et d_2 définies sur l'ensemble X . On notera les boules ouvertes associées à d_i par $B_i(x, r)$, $i = 1, 2$. De même la topologie associée à d_i sera \mathfrak{T}_i , $i = 1, 2$.

En général il n'y a aucun lien entre les deux topologies \mathfrak{T}_1 et \mathfrak{T}_2 , comme on montre dans l'Exemple suivant.

Exemple 3.6. Soit $d_1 = d_s$ la distance standard sur \mathbb{R} (i.e., $d_1(x, y) = |x - y|$) et $d_2 = d_{\text{discr}}$ la distance discrète introduite dans l'Exemple 2.1. Par l'Exercice 3.2 on a

$$\mathfrak{T}_1 = \left\{ \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (a_n, b_n) \mid -\infty \leq a_n < b_n \leq +\infty, \quad \forall n \in \mathbb{N} \right\}. \quad (3.12)$$

D'autre part, par l'Exemple 3.4, on a que $\mathfrak{T}_2 = 2^{\mathbb{R}}$. Donc, $\mathfrak{T}_1 \subsetneq \mathfrak{T}_2$.

Définition 3.4. Soient d_1 et d_2 deux métriques sur X . On dit que d_1 et d_2 sont :

- i. *Topologiquement équivalentes* : Si les topologies associées à d_1 et d_2 coïncident ;
- ii. *Lipschitz-équivalentes* : s'il existe $c > 0$ tel que

$$\frac{1}{c}d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq c d_1(x, y), \quad \forall x, y \in X. \quad (3.13)$$

Un exemple très simple d'équivalence topologique est donné par les espaces métriques finis.

Proposition 3.3. *Soit X un ensemble fini. Alors, toutes distances est topologiquement équivalentes à la distance discrète.*

Démonstration. Soit d une distance sur X . Montrons que tout partie de X est ouverte par rapport à d , ce qui implique l'énoncé grâce à l'Exemple 3.4. Par la troisième propriété de la Proposition 3.2, à cet effet il suffit de montrer que les singleton sont ouverts.

Car X est fini, l'ensemble $\mathfrak{X} = \{d(x, y) \mid x, y \in X, x \neq y\}$ est fini et séparé de 0. Donc, si on pose $r_0 := \min \mathfrak{X}$ on a $r_0 > 0$. En particulier, ceci implique que $B(x, r_0/2) = \{x\}$ pour tout $x \in X$ et donc que les singleton sont ouverts. \square

La proposition suivante justifie le fait que la Lipschitz-équivalence est parfois appelé *équivalence forte*.

Proposition 3.4. *La Lipschitz-équivalence implique l'équivalence topologique.*

Idée de la preuve. Il faut montrer que la Lipschitz-équivalence implique

$$B_1\left(x, \frac{r}{c}\right) \subset B_2(x, r) \subset B_1(x, cr), \quad \forall x \in X, r > 0. \quad (3.14)$$

\square

Toutefois, il est possible que deux distances soient topologiquement équivalentes sans être Lipschitz-équivalentes.

Exemple 3.7. On considère (\mathbb{R}, d_α) où $d_\alpha(x, y) = |x - y|^\alpha$ est la distance introduite dans l'Exemple 2.3, pour $\alpha < 1$. Les distances d_α et $d_s(x, y) = |x - y|$ ne sont pas Lipschitz-équivalentes. En effet, un simple argument d'analyse réel montre que

$$\forall c > 0, \exists x_0 > 0 \quad \text{t.q.} \quad d_\alpha(x_0, 0) = |x_0|^\alpha < c|x_0| = d_s(x_0, 0). \quad (3.15)$$

Cependant, la topologie \mathfrak{T}_α induite par d_α est la même que celle induite par la distance standard d_s , qu'on denote \mathfrak{T}_s . L'argument étant essentiellement le même pour l'autre

implication, on se contente de montrer que $\mathfrak{T}_s \subset \mathfrak{T}_\alpha$. Soit $A \subset \mathbb{R}$ un ensemble ouvert pour \mathfrak{T}_s . Si $A = \emptyset$, alors $A \in \mathfrak{T}_\alpha$ et on est bon. Si $A \neq \emptyset$, soit $x \in A$ et choisissons $r > 0$ tel que $B_s(x, r) \subset A$ (où $B_s(x, r)$ est la boule ouverte pour d_s). Ceci est équivalent à

$$|x - y| < r \implies y \in A. \quad (3.16)$$

Mais alors, par monotonie de la fonction $t \mapsto t^\alpha$, on a

$$d_\alpha(x, y) = |x - y|^\alpha < r^\alpha \implies y \in A. \quad (3.17)$$

Cela montre que $B_\alpha(x, r^\alpha) \subset A$. Donc, $A \in \mathfrak{T}_\alpha$.

Équivalence de normes

Comme l'exemple précédent suggère, si on se réduit à considérer des distances associées à des normes (qui sont homogènes), la notion d'équivalence coïncide avec le fait d'induire la même topologie.

Définition 3.5. Deux normes \mathbf{n}_1 et \mathbf{n}_2 sur un espace vectoriel E sont équivalentes ($\mathbf{n}_1 \sim \mathbf{n}_2$) si les métriques associées sont Lipschitz-équivalentes.

Remarque 3.2. Il est clair que $\mathbf{n}_1 \sim \mathbf{n}_2$ si et seulement si il existe $c > 0$ tel que

$$\frac{1}{c} \mathbf{n}_1(v) \leq \mathbf{n}_2(v) \leq c \mathbf{n}_1(v), \quad \forall v \in E. \quad (3.18)$$

Proposition 3.5. Deux normes sont équivalentes si et seulement si les métriques associées sont topologiquement équivalentes.

Avant de montrer cette proposition on attend d'introduire un concept essentielle pour l'analyse dans les espaces métriques et dans les evn. La preuve sera donc faite dans la Section 4.2.1.

On termine cette section avec quelque exemple qui, notamment, fera ressortir une première importante différence entre les evn de dimension finie et ceux de dimension infinie.

Exemple 3.8 (p -normes en dimension finie). Les p -normes dans \mathbb{R}^n sont tous équivalentes, comme on montrera dans l'Exercice 3.5. En effet, un des résultats principaux du cours sera que dans un evn de dimension finie *toute norme est équivalente*.

Exemple 3.9 (p -normes en dimension infinie). On considère, par exemple, $C([0, 1])$. Dans ce cas on peut montrer que aucune couple de p -normes sont équivalentes. On se contentera de démontrer que $\|\cdot\|_1 \not\sim \|\cdot\|_\infty$. En particulier, on niera le fait qu'il existe $c > 0$ tel que $\|f\|_\infty \leq c\|f\|_1$ pour tous $f \in C([0, 1])$ en montrant qu'il existe une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C([0, 1])$ tel que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n\|_1 = 0 \quad \text{mais} \quad \|f_n\|_\infty = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3.19)$$

Une telle suite est donnée, par exemple, par

$$f_n(x) := \begin{cases} 1 - nx & \text{si } x \in [0, 1/n], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.20)$$

En effet, $\|f_n\|_\infty = |f(0)| = 1$ et

$$\|f_n\|_1 = \int_0^{1/n} |1 - nx| dx = \frac{1}{2n} \longrightarrow 0 \quad \text{pour } n \rightarrow +\infty. \quad (3.21)$$

3.3 Intérieur et adhérence

On commence par introduire une notion qui simplifiera beaucoup les énoncés suivants.

Définition 3.6. Soit (X, d) un espace métrique et $x \in X$. On dit que une partie $V \subset X$ est une *voisinage de x* s'il existe un ouvert $O \subset V$ tel que $x \in O$.

Par exemple, $[0, 2]$ est une voisinage de 1 dans (\mathbb{R}, d_s) . Par contre $[1, 2]$ ne l'est pas.

L'énoncé suivant est une conséquence directe des définitions et du fait que les boules ouvertes sont ouvertes.

Proposition 3.6. Soit (X, d) un espace métrique et $A \subset X$ une de ses parties. Alors, $x \in X$ est un point intérieur à A si et seulement si A est un voisinage de x . De plus, A est ouvert si et seulement si il est voisinage de chacun de ses points.

Définition 3.7. Soit $A \subset X$. L'*intérieur de A* , noté $\overset{\circ}{A}$ ou $\text{Int}(A)$, est le plus grand ensemble ouvert inclus dans A .

Proposition 3.7. Soit A une partie de X . Alors, $\overset{\circ}{A}$ est l'ensemble des points intérieurs à A . En particulier, A est ouvert si et seulement si $A = \overset{\circ}{A}$.

Démonstration. Notons par $J \subset A$ l'ensemble des points intérieurs de A . Comme $\overset{\circ}{A} \subset A$ est ouvert par définition, A est voisinage de tout ses points et donc, par la Proposition 3.6, on a $\overset{\circ}{A} \subset J$.

Car $J \subset A$, par définition de $\overset{\circ}{A}$ il nous suffit maintenant de montrer que J est ouvert. Grâce à la Proposition 3.6, pour tout $x \in J$ il existe un ouvert $O_x \subset A$ tel que $x \in O_x$. Comme O_x est ouvert, on a que A est voisinage de chacun des points de O_x , et donc O_x est constitué des points intérieurs. En particulier, $O_x \subset J$, qui est donc ouvert. \square

Une notion duale à celle de intérieur est la suivante.

Définition 3.8. Soit $A \subset X$. L'*adhérence de A* , noté \bar{A} ou $\text{Ad}(A)$, est le plus petit ensemble fermé qui contient A .

Pour caractériser l'adhérence on pose la définition suivante.

Définition 3.9. Soit $A \subset X$. Un point $x \in A$ est dit *adhérent* à A si pour tout voisinages V de x on a $V \cap A \neq \emptyset$.

Proposition 3.8. Soit A une partie de X . Alors, \bar{A} est l'ensemble des points adhérents à A . De plus, A est fermé si et seulement si $A = \bar{A}$.

Démonstration. C'est immédiat d'observer que tout $x \in A$ sont adhérent à A . On note donc $B \supset A$ l'ensemble des points adhérents. Grace à la Proposition 3.7 il suffit donc de montrer que

1. $X \setminus \bar{A}$ est l'intérieur du complémentaire de A ;
2. l'ensemble des points intérieurs de $X \setminus A$ est $X \setminus B$.

Ces fait suivent aisément en niant proprement les définition données ci-dessus. \square

Définition 3.10. Soit (X, d) un espace métrique et $A \subset X$. On appelle *frontière de A* l'ensemble

$$\text{Fr } A = \bar{A} \setminus \overset{\circ}{A}. \quad (3.22)$$

Les propriétés qui suivent constituent un bon entraînement pour le lecteur désireux de se tester sur les notions de cette section. Elles sont assez simples à démontrer mais nécessitent une bonne compréhension de la notion d'adhérence et intérieur.

Proposition 3.9. Soit (X, d) un espace métrique, A et B deux sous-ensembles de X . On a :

- i. Si $A \subset B$, alors $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$ et $\bar{A} \subset \bar{B}$;
- ii. $\overline{\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$;
- iii. $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$;
- iv. La frontière de A est une partie fermée de X .

On conclut cette section en calculant adhérence et intérieur des boules, dans le cas d'un evn .

Proposition 3.10. Soit E un evn . Alors, pour tout $x \in E$ et $r > 0$ on a

$$\bar{B}(x, r) = \text{Ad}(B(x, r)) \quad \text{et} \quad \text{Int}(\bar{B}(x, r)) = B(x, r). \quad (3.23)$$

Démonstration. On ne démontrera que la première assertion, car la seconde se démontre exactement sur le même principe. Par définition on a que $B(x, r) \subset \bar{B}(x, r)$ et donc, par les Propositions 3.8 et 3.9, on a $\text{Ad}(B(x, r)) \subset \text{Ad}(\bar{B}(x, r)) = \bar{B}(x, r)$.

Il reste donc à montrer que $\bar{B}(x, r) \subset \text{Ad}(B(x, r))$. Comme c'est évident que si $y \in B(x, r)$ alors $y \in \text{Ad}(B(x, r))$, on se réduit à devoir montrer que si $y \in \bar{B}(x, r) \setminus B(x, r)$ on a $y \in \text{Ad}(B(x, r))$.

Soit donc y tel que $\|x - y\| = r$. Par définition de point adhérent, pour montrer que $y \in \text{Ad}(B(x, r))$ il suffit de prouver que pour tous $\rho > 0$ on a $B(x, r) \cap B(y, \rho) \neq \emptyset$. En effet, soit $\lambda \in (0, 1)$ et $p_\lambda = \lambda x + (1 - \lambda)y$. D'une part $p_\lambda \in B(x, r)$ car :

$$\|p_\lambda - x\| = (1 - \lambda)\|y - x\| = (1 - \lambda)r < r. \quad (3.24)$$

D'autre part, $\|p_\lambda - y\| = \lambda\|x - y\| = \lambda r$. Or, si l'on choisit λ suffisamment petit, tel que $\lambda r < \rho$ (i.e., $0 < \lambda < \min\{1, \rho/r\}$) on a $p_\lambda \in B(y, \rho)$. Cela clôt la démonstration. \square

La proposition précédente est fautive en générale dans les espaces métriques, comme on voit à travers l'exemple des boules de rayon 1 pour la métrique discrete.

3.4 Exercices

Ensembles ouverts et topologie

Exercice 3.1. Démontrer que toute boule ouverte dans un espace métrique est ouverte. Montrer aussi que toute boule fermée est fermée.

Exercice 3.2. Considérons (\mathbb{R}, d_s) . Montrer que $A \subset \mathbb{R}$ est ouvert si et seulement si il est réunion d'une quantité dénombrable d'intervalles ouverts disjoints.

Exercice 3.3. Soit (E, \mathfrak{n}) un evn .

1. Montrer que si $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel de E qui contient une boule ouverte, alors $F = E$.
2. Montrer que si $B(x, r) = B(y, \rho)$ pour $x, y \in E$ et $r, \rho > 0$, alors $x = y$ et $r = \rho$. Ce fait reste-t-il vrai dans un espace métrique ?

Equivalence de métriques

Exercice 3.4. Démontrer que dans \mathbb{R}^n on a $\|\cdot\|_p \sim \|\cdot\|_q$ pour tout $p, q \in [1, +\infty]$

Exercice 3.5. Montrer que $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur l'espace des polynômes $\mathbb{R}[x]$ ne sont pas équivalentes.

Intérieur et adhérence

Exercice 3.6. Pour les ensembles suivants déterminer intérieur, adhérence, frontière et points intérieurs :

1. Dans (\mathbb{R}, d_s) :

$$\mathbb{Z}, \quad \mathbb{Q}, \quad \left\{ m + \frac{1}{n} \mid m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}^* \right\}. \quad (3.25)$$

2. Dans $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$:

$$\{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}, \quad \{(x, y) \mid xy = 1\}, \quad \{(x, y) \mid xy < 1\}. \quad (3.26)$$

3. Dans $(C([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$:

$$\{f \in C([0, 1]) \mid f \text{ est constante}\}, \quad \{f \in C([0, 1]) \mid f(1/2) = 1\}. \quad (3.27)$$

Exercice 3.7. Soit (X, d) un espace métrique et $A \subset X$. Montrer que $\text{diam } A = \text{diam } \bar{A}$, où $\text{diam } A = \sup_{x, y \in X} d(x, y)$.

Exercice 3.8. Soit (X, d) un espace métrique et, pour $\kappa > 0$ fixé, posons

$$d^\kappa(x, y) = \kappa \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}. \quad (3.28)$$

1. Montrer que d^κ est une métrique et que $\text{diam}_{d^\kappa}(X) = \kappa$. (Ceci est vrai même si le diamètre par rapport à d de X est infini).
2. (\star) Montrer que (X, d) est topologiquement équivalent à (X, d^κ) .

4 Convergence et continuité

Dans ce chapitre on introduit la notion de convergence et ses conséquences. Cette notion est ce qui distingue les espaces topologiques des espaces métriques.

Définition 4.1. Soit (X, d) un espace métrique. Une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ est *convergente* si

$$\exists x_\infty \in X \quad \text{t.q.} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_n, x_\infty) = 0. \quad (4.1)$$

Dans ce cas on dit que la suite converge à x_∞ et on note $x_n \longrightarrow x_\infty$ ou $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_\infty$.

Bien sur, par définition de limite de suite réelles la définition précédente est équivalente à demander que

$$\exists x_\infty \in X \quad \text{t.q.} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{t.q.} \quad \forall n \geq N \text{ on a } d(x_n, x_\infty) \leq \varepsilon. \quad (4.2)$$

On démontre aussi aisément l'énoncé suivant.

Proposition 4.1 (Convergence topologique). *Soient (X, d) un espace métrique et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de X . Les énoncés suivants sont équivalents.*

- i. $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge à $x_\infty \in X$;
- ii. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \in B(x_\infty, \varepsilon)$ si $n \geq N$;
- iii. Pour tout voisinages $U \subset X$ de x_∞ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \in U$ si $n \geq N$;

4.1 Propriétés de la convergence

Les propriétés suivantes sont des conséquence de l'inégalité triangulaire (et le la coïncidence).

Proposition 4.2 (Unicité de la limite). *Soient (X, d) un espace métrique et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ une suite. Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente, alors sa limite est unique.*

Démonstration. On suppose par contradiction qu'ils existent $x_\infty, y_\infty \in X$, $x_\infty \neq y_\infty$, tels que $x_n \longrightarrow x_\infty$ et $x_n \longrightarrow y_\infty$. Comme $d(x_\infty, y_\infty) > 0$, par définition il existent donc $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tels que $d(x_n, x_\infty) \leq d(x_\infty, y_\infty)/4$ si $n \geq N_1$ et $d(x_n, y_\infty) \leq d(x_\infty, y_\infty)/4$ si $n \geq N_2$. En posant $N = \max\{N_1, N_2\}$ et en utilisant l'inégalité triangulaire, on a

$$d(x_\infty, y_\infty) \leq d(x_n, x_\infty) + d(x_n, y_\infty) \leq \frac{d(x_\infty, y_\infty)}{4} + \frac{d(x_\infty, y_\infty)}{4} = \frac{d(x_\infty, y_\infty)}{2}. \quad (4.3)$$

Cela donne $d(x_\infty, y_\infty) < d(x_\infty, y_\infty)$ et donc l'absurde qu'on cherchait. \square

Une autre propriété qu'on souhaite être satisfaite par les suites convergentes est qu'elle restent bornées. D'abord, on définit la notion d'ensemble borné dans un espace métrique.

Définition 4.2. Soit (X, d) un espace métrique et $A \subset X$. Le *diamètre* de A est la quantité

$$\text{diam } A = \sup_{x, y \in A} d(x, y). \quad (4.4)$$

Si $\text{diam } A < +\infty$, on dit que A est *borné*. Une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ est *bornée* si l'ensemble $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est borné.

Remarque 4.1. Encore une fois, il faut faire attention. Même si pour la distance euclidienne dans le plan les boules de rayon r ont diamètre $2r$, ceci est faux dans un espace métrique général.

On a donc la proposition suivante, qu'on laisse comme exercice. Nous démontrerons un résultat plus fort dans la Section 5.1.

Proposition 4.3. Soit (X, d) un espace métrique. Toute suite convergente dans X est bornée.

La dernière propriété de base de la convergence concerne les sous-suite. On rappelle cette notion.

Définition 4.3. Soit X un ensemble et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ une suite. Une *suite extraite* (ou sous-suite) de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \subset X$ où $(n_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ est une suite strictement croissante. Dans ce cas, on note $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \subset (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Aussi cette propriété est laissée comme exercice.

Proposition 4.4. Toute suite extraite d'une suite convergente dans un espace métrique est convergente dans cet espace de même limite.

Remarque 4.2. La proposition précédente est fortement utilisée pour démontrer qu'une suite n'est pas convergente. En effet, lorsque l'on souhaite montrer qu'une suite n'est pas convergente, une méthode fréquemment utilisée consiste à extraire deux sous-suites de la suite initiale, dont les limites sont différentes. C'est l'exemple de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ définie par $u_n = (-1)^n$. Il suffit de considérer la sous-suite extraite en ne choisissant que les éléments de rang pair, puis la suite extraite construite en ne considérant que les éléments de rang impair.

4.2 Les notions topologiques à travers la convergence

Dans cette section on va caractériser les notions topologiques introduites dans le Chapitre 3 à travers les suites.

Proposition 4.5 (Caractérisations séquentielle de l'adhérence). Soit (X, d) un espace métrique et $A \subset X$. Alors, $a \in \bar{A}$ si et seulement si a est limite d'une suite d'éléments de A .

Démonstration. On rappelle que $a \in \bar{A}$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ on a $B(a, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$. En choisissant $\varepsilon = 1/n$, cette propriété nous permet de construire une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ telle que $x_n \in B(a, 1/n) \cap A$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. En particulier,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_n, a) < \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0. \quad (4.5)$$

Donc, $x_n \rightarrow a$ et donc a est limite d'une suite d'éléments de A .

Supposons maintenant qu'il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ telle que $x_n \rightarrow a \in X$ et montrons que $a \in \bar{A}$. À cet effet, on fixe $\varepsilon > 0$ et on observe que par définition de convergence il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \in B(a, \varepsilon)$ pour tout $n \geq N$. Autrement dit $B(a, \varepsilon) \cap A \supset \{x_n \mid n \geq N\} \neq \emptyset$, et donc $a \in \bar{A}$. \square

Proposition 4.6 (Caractérisation séquentielle des fermés). *Soit (X, d) un espace métrique et $A \subset X$. Alors, A est fermé si et seulement si*

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A \quad \text{t.q.} \quad x_n \rightarrow x_\infty \in X \implies x_\infty \in A. \quad (4.6)$$

Démonstration. Si A est fermé est $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ est telle que $x_n \rightarrow x_\infty \in X$, la caractérisation séquentielle de l'adhérence implique que $x_\infty \in \bar{A}$. Or, comme A est fermé on a $A = \bar{A}$, et donc $x_\infty \in A$.

Supposons maintenant que la propriété (4.6) soit satisfaite et montrons que A est fermé. Comme $\bar{A} \supset A$, il nous suffit de montrer que $\bar{A} \subset A$. Soit $x \in \bar{A}$. Alors, encore une fois par caractérisation séquentielle d'adhérence, x est limite d'une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$. On en déduit par (4.6) que $x \in A$. C'est ce que l'on voulait démontrer. \square

Proposition 4.7 (Caractérisation séquentielle de points intérieurs). *Soit (X, d) un espace métrique et $A \subset X$. Alors, $a \in \overset{\circ}{A}$ si et seulement si*

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X, \quad \text{t.q.} \quad x_n \rightarrow a \implies \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{t.q.} \quad x_n \in A \quad \forall n \geq N. \quad (4.7)$$

Démonstration. Supposons que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ soit une suite convergente à $a \in \overset{\circ}{A}$. Comme a est un point intérieur, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(a, \varepsilon) \subset A$. Par convergence de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ on a donc qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \in B(a, \varepsilon) \subset A$ pour $n \geq N$. Cela montre (4.7).

On prouve maintenant la deuxième implication par contra-posé. On suppose que (4.7) ne soit pas vérifié pour un certain $a \in X$. C.-à-d., on suppose qu'il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ convergente à a mais telle que

$$\forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq N \quad \text{t.q.} \quad x_n \notin A. \quad (4.8)$$

C'est donc immédiat, par définition de convergence, de déduire que pour tout $\varepsilon > 0$ la boule $B(a, \varepsilon)$ contient un élément $x_n \notin A$. Cela montre que $a \notin \overset{\circ}{A}$. \square

Proposition 4.8 (Caractérisation séquentielle des ouverts). *Soit (X, d) un espace métrique et $A \subset X$. Alors, A est ouvert si et seulement si (4.7) est vérifié pour tout $a \in A$.*

4.2.1 Équivalence topologique et suites

Le concept de suite est fortement lié à la topologie associée à la distance. En effet on a le théorème suivant.

Théorème 4.9. *Soit X un ensemble. Deux métriques sur X sont équivalentes si et seulement si ils ont les mêmes suites convergentes.*

Démonstration. Supposons que (X, d) et (X, d') soient topologiquement équivalents. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de X qui converge à x_∞ par rapport à d . Soit $U \subset X$ un voisinage par rapport à d' de x_∞ . Par équivalence topologique, U est aussi voisinage par rapport à d de x_∞ et par la caractérisation séquentielle des ouverts il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \in U$ pour tous $n \geq N$. Donc, par la Proposition 4.1, on a que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge à x_∞ par rapport à d' aussi. En échangeant les rôles de d et d' on démontre donc la condition nécessaire.

Supposons maintenant que d et d' aient les mêmes suites convergentes. Soit $U \subset X$ soit ouvert par rapport à d et montrons qu'il est aussi ouvert par rapport à d' , ce qui complétera la démonstration. Ceci revient à montrer que $X \setminus U$ est fermé par rapport à d' . À cet effet on utilisera la caractérisation séquentielle des fermés. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans $X \setminus U$ qui est convergente par rapport à d' , et donc à d , à $x_\infty \in X$. Comme $X \setminus U$ est fermé par rapport à d on a que $x_\infty \in X \setminus U$ qui est donc fermé aussi par rapport à d' . \square

Remarque 4.3. L'Exemple 3.7 montre donc que ce n'est pas nécessaire pour deux distances avec les mêmes suites convergentes d'être Lipschitz-équivalente.

Le prochain énoncé montre le lien entre le concept d'équivalence de normes, donné dans la Définition 3.5, et la convergence.

Proposition 4.10. *Soit E un espace vectoriel et \mathbf{n}_1 et \mathbf{n}_2 deux normes sur E . Alors, les énoncés suivants sont équivalents :*

- i. \mathbf{n}_1 et \mathbf{n}_2 sont équivalentes ;*
- ii. une suite est convergent pour \mathbf{n}_1 si et seulement si elle est convergent (vers la même limite) pour \mathbf{n}_2 ;*
- iii. une suite est convergent vers 0_E pour \mathbf{n}_1 si et seulement si elle est convergent vers 0_E pour \mathbf{n}_2 .*

Démonstration. Le fait que *i.* implique *ii.* est trivial, en revenant à la définition de normes équivalentes et de convergence. Il est ainsi clair que *ii.* implique *iii.*, car il s'agit d'un résultat plus faible. Il reste donc à montrer que *iii.* implique *i.*

On raisonne par l'absurde. Supposons que *iii.* soit vérifié mais que le rapport $\mathbf{n}_2/\mathbf{n}_1$ soit non-borné, c.-à-d.,

$$\forall M > 0, \quad \exists x \in E \setminus \{0_E\} \quad \text{t.q.} \quad \frac{\mathbf{n}_2(x)}{\mathbf{n}_1(x)} \geq M. \quad (4.9)$$

En choisissant successivement $M = 1, M = 2, \dots$, etc., on construit donc une suite d'éléments de E , notée $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que :

$$\frac{\mathbf{n}_2(x_n)}{\mathbf{n}_1(x_n)} > n \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (4.10)$$

Définissons alors la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par la relation $y_n := \frac{x_n}{\sqrt{n\mathbf{n}_1(x_n)}}$. Il est clair que pour n qui tends à $+\infty$ on a

$$\mathbf{n}_1(y_n) = \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{n}_2(y_n) > n\mathbf{n}_1(y_n) = \sqrt{n} \rightarrow +\infty. \quad (4.11)$$

On a donc construit une suite qui tends vers 0_E pour \mathbf{n}_1 mais pas pour \mathbf{n}_2 , ce qui est absurde. Donc il existe $c > 0$ tel que $\mathbf{n}_2 \leq c\mathbf{n}_1$. Le même raisonnement fait en échangeant les rôles de \mathbf{n}_1 et \mathbf{n}_2 donne l'autre inégalité et clôt la démonstration. \square

Remarque 4.4. La Proposition 3.5, qu'on avait pas démontrée, est une conséquence de la proposition précédente et du Théorème 4.9.

4.2.2 Densité dans un espace métrique

Le concept de densité dans un espace vectoriel normé, bien qu'un peu théorique, conduit à des résultats des plus intéressants. Nous insisterons particulièrement sur le théorème de Stone-Weierstrass.

Définition 4.4. Soit (X, d) un espace métrique. Une partie $A \subset X$ est *dense dans X* si et seulement si $\bar{A} = X$.

Bien qu'on en parle maintenant, on remarque que le concept de densité est topologique et il nécessite pas d'une distance. On donne maintenant deux différentes caractérisations de densité.

Proposition 4.11. Soit (X, d) un espace métrique et $A \subset X$. Les énoncés suivants sont équivalents :

- i. A est dense dans X ;
- ii. (Caractérisation topologique) Pour tout ouvert $G \subset X$ on a $G \cap A \neq \emptyset$;
- iii. (Caractérisation séquentielle) Pour tout $x \in X$ il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ telle que $x_n \rightarrow x$.

Démonstration. Le fait que *i.* soit équivalent à *ii.* découle directement de la définition de densité et de la définition (topologique) de adhérence. De même est vrai pour l'équivalence entre *i.* et *iii.*, où on utilise la caractérisation séquentielle de l'adhérence. \square

Exemple 4.1. On montre que \mathbb{Q} est une partie dense de (\mathbb{R}, d_s) à travers la caractérisation séquentielle. Soit $x \in \mathbb{R}$ et appelons $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par

$$x_n = \frac{1}{10^n} [10^n x], \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (4.12)$$

Ici, $[y]$ dénote la partie entière de y . Par définition, $x_n \in \mathbb{Q}$. De plus, comme $y - 1 < [y] \leq y$ on a que

$$x - \frac{1}{10^n} = \frac{1}{10^n}(10^n x - 1) < x_n \leq \frac{1}{10^n}10^n x = x. \quad (4.13)$$

Par le théorème d'encadrement on a donc que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x. \quad (4.14)$$

Donc \mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R} .

On observe que, maintenant qu'on sait que \mathbb{Q} est dense, la caractérisation topologique de densité nous permet de déduire immédiatement que pour tout réel $a < b$ il existe $q \in \mathbb{Q}$ tel que $a < q < b$. En effet, (a, b) est un ouvert pour (\mathbb{R}, d_s) .

4.3 Continuité dans un espace métrique

Dans cette section on commence l'étude des fonctions définies entre espaces métriques.

Définition 4.5. Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques et $f : X \rightarrow Y$. Soit $A \subset X$ et $x_0 \in \bar{A}$. On dit que f a pour limite y_0 quand x tend vers x_0 , selon A , si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \quad \text{t.q.} \quad d_X(x, x_0) < \delta \text{ et } x \in A \implies d_Y(f(x), y_0) < \varepsilon. \quad (4.15)$$

On écrira alors $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in A}} f(x) = y_0$ ou $f(x) \rightarrow y_0$.

Comme la notion de convergence, aussi la notion de limite est inchangée si on utilise distances Lipschitz-équivalentes.

Définition 4.6. Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques et $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$. On dit que f est *continue en* $x_0 \in X$ si $f(x) \rightarrow f(x_0)$. On dit que f est *continue sur* $A \subset X$ si f est continue en tout points de A .

On va maintenant caractériser la continuité à travers les suites. En pratique, cette propriété nous servira surtout à prouver qu'une fonction est discontinue.

Proposition 4.12 (Caractérisation séquentielle de continuité). *Une fonction $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ est continue en un point $x_0 \in X$ si et seulement si*

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X \quad \text{t.q.} \quad x_n \rightarrow x_0 \implies f(x_n) \rightarrow f(x_0). \quad (4.16)$$

Démonstration. Supposons que f est continue en x_0 et soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergente à x_0 . Par définition de continuité, pour tout $\varepsilon > 0$ on a

$$\exists \delta > 0 \quad \text{t.q.} \quad d_X(x, x_0) < \delta \implies d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon. \quad (4.17)$$

étant $\delta > 0$ donnée, par convergence de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ on obtient que

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \text{t.q.} \quad n \geq N \implies d_X(x_n, x_0) < \delta. \quad (4.18)$$

En combinant ces deux faits, on a donc

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \text{t.q.} \quad n \geq N \implies d_Y(f(x_n), f(x_0)) < \varepsilon. \quad (4.19)$$

Puisque ε a été choisi de façon arbitraire, on en déduit que $f(x_n)$ converge vers $f(x_0)$. Ceci montre donc (4.16)

Raisonnons maintenant par contra-posée pour démontrer l'autre implication. Soit f non continué en $x_0 \in X$. Alors, il existe un certains $\varepsilon > 0$ tel que l'on puisse construire une suite d'éléments de X , notée $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ vérifiant

$$d_X(x_n, x_0) < \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad d_Y(f(x_n), f(x_0)) > \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (4.20)$$

Ceci contredit (4.16). □

On donne maintenant une autre caractérisation de la continuité, purement topologique. Ceci nous montre que aussi la continuité est un concept purement topologique, qui nécessite pas d'une structure métrique pour être défini.

Rappelons au préalable la notion d'image réciproque d'un ensemble par une application.

Définition 4.7. Soient X et Y deux ensembles et $f : X \rightarrow Y$. Soit $A \subset Y$. On définit l'image réciproque de A par f l'ensemble

$$f^{-1}(A) = \{x \in X \mid f(x) \in A\} \subset X. \quad (4.21)$$

Remarque 4.5. La notation ci-dessus est malheureusement trompeuse. En effet, l'image réciproque n'est absolument pas liée au fait que f soit inversible ou moins. Toutefois, dans le cas où f soit inversible, la notion d'image réciproque de A qu'on vient de donner coïncide avec l'image de A à travers la fonction inverse.

Proposition 4.13 (Caractérisation topologique de continuité). *Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques et $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$. Les énoncés suivants sont équivalents.*

- i. f est continue sur X ;*
- ii. Pour tout ouvert $U \subset Y$, l'ensemble $f^{-1}(U)$ est un ouvert de X ;*
- iii. Pour tout fermé $F \subset Y$, l'ensemble $f^{-1}(F)$ est un fermé de X .*

Démonstration. Supposons que f soit continue sur X . Par définition de limite, ceci est équivalent au fait que, pour tout $x \in X$ et pour tout voisinage $V \subset Y$ de $f(x)$ il existe un voisinage (ouvert) $A \subset X$ de x tel que $f(A) \subset V$. En particulier, si $U \subset Y$ est ouvert et $f(x) \in U$, on a qu'il existe un ouvert $A \subset X$ tel que $x \in A \subset f^{-1}(U)$. Donc, tout point de $f^{-1}(U)$ est intérieur. Ceci implique *ii.*

Montrons que *ii.* implique *iii.*. On rappelle que $F \subset Y$ est fermé si et seulement si $Y \setminus F$ est ouvert. Donc $f^{-1}(Y \setminus F)$ est ouvert. Comme par définition d'image réciproque on a que $f^{-1}(Y \setminus F) = X \setminus f^{-1}(F)$, ceci implique que $f^{-1}(F)$ est fermé.

Finalement, on montre que si f n'est pas continue alors *iii.* n'est pas vérifiée. Ceci montrera que *iii.* implique *i.* est terminera la preuve. Si f n'est pas continue, il existe

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ telle que $x_n \rightarrow x_\infty$ et telle que $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas convergente à $f(x_\infty)$. En détaillant cette dernière propriété on observe que, quitte à remplacer $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par une sous-suite extraite, on peut admettre que $f(x_\infty) \notin F = \text{Ad}\{f(x_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$. Ceci montre que *iii.* n'est pas vérifié, car implique que $x_\infty \notin f^{-1}(F)$ tandis que $x_\infty \in \text{Ad}(f^{-1}(F)) = \text{Ad}\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ par construction. \square

Remarque 4.6. Une application peut très bien être continue et telle que l'image d'un ouvert ne soit pas un ouvert (ou que l'image d'un fermé ne soit pas un fermé). Par exemple, considérons la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1)$ définie par

$$f(x) = \frac{|x|}{1 + |x|}. \quad (4.22)$$

Cette fonction est bien sur continue, mais $f(\mathbb{R}) = [0, 1)$, qui est ni ouvert ni fermé.

Avant de continuer la discussion en introduisant des concept plus forts de continuité, on discute comment les fonctions continues permet de comparer différentes topologies.

Définition 4.8. Un *homéomorphisme* entre (X, d_X) et (Y, d_Y) est une fonction $f : X \rightarrow Y$ telle que

- i. $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ est continue ;
- ii. f est bijective ;
- iii. $f^{-1} : (Y, d_Y) \rightarrow (X, d_X)$ est continue.

On dit que (X, d_X) et (Y, d_Y) sont *homéomorphes* s'il existe un homéomorphisme entre eux.

En partant de cette définition, est très difficile de montrer que deux espaces ne sont pas homéomorphes, car on devrait vérifier que aucune bijection puisse être un homéomorphisme.

Exemple 4.2. On collecte ici quelque exemple d'homéomorphisme (ou non).

1. $f : ([0, 1], d_s) \rightarrow ([0, 1], d_s)$ définie par $f(x) = x^2$, $x \in [0, 1]$. En effet, f est continue, bijective, et son inverse est $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ qui est continue sur $[0, 1]$.
2. Soient $m, b, c, d \in \mathbb{R}$, $c \leq d$, $m \geq 0$ et définissons fonction $f(x) = mx + b$, $x \in [c, d]$. Alors, $f : ([c, d], d_s) \rightarrow ([f(c), f(d)], d_s)$ est un homéomorphisme d'inverse $f^{-1}(x) = (x - b)/m$.
3. L'application $\log : ((0, +\infty), d_s) \rightarrow (\mathbb{R}, d_s)$ est un homéomorphisme.
4. La fonction $f : (\mathbb{R}, d_{\text{discr}}) \rightarrow (\mathbb{R}, d_s)$ définie par $f(x) = x$ est continue. On le vérifie aisément à travers la caractérisation topologique, car tout partie de $(\mathbb{R}, d_{\text{discr}})$ est ouverte. Toutefois, f n'est pas un homéomorphisme. En effet, son inverse est $f^{-1}(x) = x$, mais $f^{-1} : (\mathbb{R}, d_s) \rightarrow (\mathbb{R}, d_{\text{discr}})$ n'est pas continue car, e.g., $(0, 1]$ est ouvert dans $(\mathbb{R}, d_{\text{discr}})$ mais $f^{-1}((0, 1]) = (0, 1]$ n'est pas ouvert dans (\mathbb{R}, d_s) .

Le théorème suivant montre que le concepts d'équivalence topologique et d'existence d'un homéomorphisme coïncident. Pour cette raison, d'or en avant on confondra ces termes.

Théorème 4.14. Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques. Soit $f : X \rightarrow Y$ une bijection. On note d_f la distance induite par f sur X , i.e., $d_f(x_1, x_2) = d_Y(f(x_1), f(x_2))$ pour tout $x_1, x_2 \in X$. Les énoncés suivant sont équivalents.

- i. f est un homéomorphisme ;
- ii. (X, d_X) et (X, d_f) sont topologiquement équivalents.

Démonstration. On commence par supposer que f est un homéomorphisme et on montre que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ est convergente par rapport à d_X si et seulement si elle est convergente par rapport à d_f . Par le Théorème 4.9, ceci impliquera que (X, d_X) et (X, d_f) sont topologiquement équivalents.

Supposons que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit convergente à $x_\infty \in X$ par rapport à d_f . Ceci est équivalent au fait que $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}} \subset Y$ est convergente à $f(x_\infty)$ par rapport à d_Y . Comme f^{-1} est continue on a donc que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente à x_∞ par rapport à d_X . Le même raisonnement avec f au lieu de f^{-1} permet de conclure que si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente par rapport à d_X elle est convergente aussi par rapport à d_f .

On suppose maintenant que (X, d_X) et (X, d_f) sont topologiquement équivalents et on montre que f est un homéomorphisme. Par le Théorème 4.9, les espaces métriques (X, d_X) et (X, d_f) ont les mêmes suites convergentes. L'énoncé suit donc en observant que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente par d_f si et seulement si $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}} \subset Y$ est convergente par d_Y . \square

4.3.1 Uniforme continuité et applications Lipschitziennes

Une façon banalement équivalente de définir les fonctions continues est la suivante.

Proposition 4.15. Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques et $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$. Alors, f est continue si et seulement si

$$\forall x_0 \in X \text{ et } \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 \quad \text{t.q.} \quad d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon \quad \forall x \in X \quad \text{t.q.} \quad d_X(x, x_0) < \delta. \quad (4.23)$$

Dans la propriété ci-dessus, δ peut dépendre à la fois de x_0 et de ε . Le premier renforcement du concept de continuité vient tout simplement en demandant l'indépendance de δ de x .

Définition 4.9. Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques et $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$. On dit que f est *uniformément continue* si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 \quad \text{t.q.} \quad d_Y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon \quad \forall x_1, x_2 \in X \quad \text{t.q.} \quad d_X(x_1, x_2) < \delta. \quad (4.24)$$

Remarque 4.7. La notion de uniforme continuité *n'est pas* une notion topologique, mais elle a besoin d'une métrique pour être définie¹.

1. En effet, il existe une structure intermédiaire, celle d'espace uniforme, qui se place entre les espaces topologiques et les espaces métriques et qui permet de définir le concept de continuité uniforme.

Le fait qu'une fonction uniformément continue soit continue est, bien sûr, triviale.

On considérera aussi la notion suivante, qu'on vérifie aisément être plus forte que l'uniforme continuité.

Définition 4.10. Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques et $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$. On dit que f est *lipschitzienne* s'il existe $L > 0$ tel que

$$d_Y(f(x), f(x')) \leq L d_X(x, x'), \quad \forall x, x' \in X. \quad (4.25)$$

Exemple 4.3. On donne des exemples de fonctions réels, par rapport à la distance standard.

1. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle. Une fonction $f : (I, d_s) \rightarrow (\mathbb{R}, d_s)$, dérivable sur $\overset{\circ}{I}$, est lipschitzienne si et seulement si f' est bornée sur $\overset{\circ}{I}$. On le prouve facilement à travers l'inégalité des accroissements finis.
2. La fonction $f : ([0, 1], d_s) \rightarrow (\mathbb{R}, d_s)$ définie par $f(x) = \sqrt{x}$ n'est pas lipschitzienne, par le point précédent, mais elle est uniformément continue. En effet, soient $x, y \in (0, 1]$ tels que, e.g., $x < y$. Alors, si $y - x < \eta$ on peut écrire

$$(\sqrt{y} - \sqrt{x})^2 = x + y - 2\sqrt{xy} < x + y - 2x = x - y < \eta. \quad (4.26)$$

Ici on a utilisé que $x < \sqrt{xy} < y$. Il suffit alors de choisir $\eta = \varepsilon^2$ pour prouver l'uniforme continuité de f .

3. La fonction $g : (\mathbb{R}, d_s) \rightarrow (\mathbb{R}, d_s)$ définie par $g(x) = x^2$ n'est pas uniformément continue. En effet, soit $\varepsilon = 1$. Pour tout $\delta > 0$ choisissons

$$x_1 = \frac{2}{\delta} + \frac{\delta}{4} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{2}{\delta} - \frac{\delta}{4}. \quad (4.27)$$

Alors, $|x_1 - x_2| = \delta/2 < \delta$, mais

$$|g(x_1) - g(x_2)| = |x_1 - x_2| \cdot |x_1 + x_2| = \frac{\delta}{2} \cdot \frac{4}{\delta} = 2 \geq 1. \quad (4.28)$$

La notion suivante est souvent utile.

Définition 4.11. Une *application bi-lipschitzienne* entre (X, d_X) et (Y, d_Y) est une fonction $f : X \rightarrow Y$ telle que

- i. $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ est lipschitzienne ;
- ii. f est bijective ;
- iii. $f^{-1} : (Y, d_Y) \rightarrow (X, d_X)$ est lipschitzienne.

On montrera le résultat suivant, à comparer avec le théorème 4.14, comme exercice.

Proposition 4.16. Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques. Soit $f : X \rightarrow Y$ une bijection. On note d_f la distance induite par f sur X , i.e., $d_f(x_1, x_2) = d_Y(f(x_1), f(x_2))$ pour tout $x_1, x_2 \in X$. Les énoncés suivant sont équivalents.

- i. f est une application bi-lipschitzienne ;
- ii. (X, d_X) et (X, d_f) sont Lipschitz-équivalents.

4.4 Exercices

Propriétés de la convergence

Exercice 4.1. Soit (X, d) un espace métrique. On dit qu'une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ est *définitivement constante* s'il existe $N \in \mathbb{N}$ et $x_\infty \in X$ tels que $x_n = x_\infty$ pour tout $n \geq N$.

1. Montrer que si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ est définitivement constante, alors elle converge à x_∞ .
2. Montrer que une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ converge par rapport à la métrique discrète si et seulement si elle est définitivement constante. En déduire que la convergence par rapport à d_{discr} implique la convergence par rapport à une métrique quelconque.
3. Trouver une suite dans \mathbb{R} qui converge par rapport à la métrique standard d_s mais qui ne converge pas par rapport à d_{discr} .

Les notions topologiques à travers la convergence

Exercice 4.2 (Points isolés). Soit (X, d) un espace métrique. Un point $x \in X$ est *isolé* s'il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) = \{x\}$.

1. Montrer que $x \in X$ est isolé si et seulement si $\{x\}$ est ouvert.
2. Montrer que $x \in X$ est isolé si et seulement si toute suite qui converge à x est définitivement constante, dans le sens de l'Exercice 4.1. En déduire que si X admet un point non isolé, alors d n'est pas topologiquement équivalente à la métrique discrète.
3. Soit $p \notin \mathbb{N}$, on note $p = \infty$. Définissons $\mathbb{N}_\infty = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ et appelons d_c la distance définie par l'injection $f : \mathbb{N}_\infty \rightarrow \{\frac{1}{n+1} \in \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N}\}$ donnée par $f(n) = 1/(n+1)$ si $n \in \mathbb{N}$ et $f(\infty) = 0$ (voir Exercice 2.2). Montrer que tout points de \mathbb{N}_∞ est isolé, sauf ∞ .
4. Montrer que il n'y a pas des points isolés dans un evn .

Exercice 4.3. Commencer par montrer que $\ell^2(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\ell^\infty(\mathbb{R})$. On considère après la suite $(x^k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \ell^\infty$, où $x^k = (x_n^k)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par (Attention ! Elle est une suite de suites) :

$$x_n^k = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{n}} & \text{si } 1 \leq n \leq k, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.29)$$

Montrer que :

1. $x^k \in \ell^2$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
2. $x^k \rightarrow x^\infty$ par rapport à $\|\cdot\|_\infty$, où $x^\infty = (x_n^\infty)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par $x_0 = 0$ et $x_n^\infty = 1/\sqrt{n}$ pour $n \geq 1$.
3. Montrer que $x^\infty \notin \ell^2(\mathbb{R})$ et en déduire que $\ell^2(\mathbb{R})$ n'est pas fermé dans $(\ell^\infty(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

Exercice 4.4. En suivant la même idée que dans l'Exemple 4.1, montrer que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans (\mathbb{R}, d_s) .

Exercice 4.5. Soit (X, d) un espace métrique. Montrer que l'intersection de deux parties ouvertes et denses est dense. Que dire de l'intersection de deux parties denses ?

Exercice 4.6. Soit $\mathfrak{C} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'espace des suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ qui convergent dans (\mathbb{R}, d_s) . Montrer que $\mathfrak{C} \subset \ell^\infty(\mathbb{R})$ et que \mathfrak{C} n'est pas dense dans $(\ell^\infty(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

Exercice 4.7. Soient (X_i, d_i) , $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$, des espaces métriques. Soient $X = \prod_{i=1}^N X_i$ le produit cartésien et $\pi_i : X \rightarrow X_i$, $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$, les projections. On dit qu'une métrique d sur X est une *métrique produit* si pour tout suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ est convergente dans (X, d) à x_∞ ;
2. Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la suite $(\pi_i(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente à $\pi_i(x_\infty)$ dans (X_i, d_i) .

Montrer que, pour $p \in [1, +\infty]$ la métrique suivante est une métrique produit :

$$d_p(x, y) = \left\| \left(d_1(\pi_1(x), \pi_1(y)), \dots, d_n(\pi_n(x), \pi_n(y)) \right) \right\|_p, \quad (4.30)$$

où $\|\cdot\|_p$ est la p -norme sur \mathbb{R}^n .

Continuité dans un espace métrique

Exercice 4.8. Étudier la continuité des applications suivantes :

$$\begin{aligned} T : (C([0, 1]), \|\cdot\|_\infty) &\rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|) \\ &f \mapsto f(0) \\ T : (C([0, 1]), \|\cdot\|_1) &\rightarrow (C([0, 1]), \|\cdot\|_\infty) \\ &f \mapsto f \\ T : (C([0, 1]), \|\cdot\|_1) &\rightarrow (C([0, 1]), \|\cdot\|_\infty) \\ &f \mapsto \left(x \mapsto \int_0^x f(t) dt \right) \end{aligned} \quad (4.31)$$

Exercice 4.9 (Densité et continuité). Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques et $f, g : X \rightarrow Y$ deux fonctions continues. Montrer que si $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in A$, où $A \subset X$ est une partie dense, alors $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in X$.

Exercice 4.10. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue par rapport à d_s et telle que $f(x + y) = f(x) + f(y)$. On note $f(1) = a \in \mathbb{R}$. Calculer f sur \mathbb{Q} et puis sur \mathbb{R} (on utilisera l'Exercice 4.9).

Exercice 4.11. Dans les notations de l'Exercice 4.7, soit d une métrique produit. Montrer que les fonctions suivantes sont continues :

1. L'application $f : (X, d) \rightarrow (\mathbb{R}, d_s)$ définie par $f(x) = d(x, x_0)$ pour $x_0 \in X$.
2. Les projections $\pi_i : (X, d) \rightarrow (X_i, d_i)$, $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$.

3. Les inclusions $\iota_i : (X_i, d_i) \rightarrow (X, d)$, $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$.

Exercice 4.12. Soit $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices 2×2 à valeurs réels.

1. Montrer que $\|M\| = \max_{i,j \in \{1,2\}} |m_{ij}|$, où $M = (m_{ij})_{i,j=1,2}$, est une norme sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer adhérence et intérieur de l'ensemble des matrices inversibles. Est-il ouvert ou fermé ?

Exercice 4.13. On définit $d : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, +\infty)$ par

$$d(x, y) = \min\{|x - y|, 1 - |x - y|\}, \quad x, y \in [0, 1]. \quad (4.32)$$

Montrer que d est une distance et que la suite $1 - 1/n$ converge à 0 par rapport à d . En déduire que $([0, 1], d)$ n'est pas homéomorphe à $([0, 1], d_s)$.

Exercice 4.14. On s'intéresse à montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(t) e^{int} dt = 0, \quad \forall f \in C([0, 1]). \quad (4.33)$$

À cette effet, soit $\mathcal{A}([0, 1]) = \{f \in C([0, 1]) \mid f \text{ est affine par intervalles}\}$.

1. Montrer cette relation lorsque $f \in C^1([0, 1])$, et puis $f \in \mathcal{A}([0, 1])$;
2. Montrer que $\mathcal{A}([0, 1])$ est une partie dense de $(C([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$, en admettant le Théorème de Heine (c-à-d que toute fonction de $C([0, 1])$ est uniformément continue) ;
3. En déduire la relation pour toute fonction continue.

5 Complétude et le théorème du point fixe

5.1 Suites de Cauchy

Définition 5.1. Soit (X, d) un espace métrique. Une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ est de *Cauchy* (ou fondamentale) si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{t.q.} \quad d(x_n, x_m) \leq \varepsilon \quad \forall n, m \geq N. \quad (5.1)$$

Remarque 5.1. Parfois on utilisera la caractérisation suivante, qui est banalement équivalente à (5.1) :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{t.q.} \quad d(x_n, x_{n+p}) \leq \varepsilon \quad \forall n \geq N, \forall p \in \mathbb{N}. \quad (5.2)$$

Une suite de Cauchy est une suite dont les points se rapprochent de plus en plus entre eux. On démontre donc aisément les propriétés suivantes.

Proposition 5.1. *Toute suite convergente dans un espace métrique est de Cauchy.*

Démonstration. Soient (X, d) un espace métrique et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ une suite convergente à $x_\infty \in X$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $d(x_n, x_\infty) < \varepsilon/2$ si $n \geq N$. Par inégalité triangulaire on a donc que

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_\infty) + d(x_\infty, x_m) < \varepsilon, \quad \forall n, m \geq N. \quad (5.3)$$

Cela montre que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy. \square

Proposition 5.2. *Toute suite de Cauchy est bornée.*

Démonstration. Soient (X, d) un espace métrique et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ une suite de Cauchy. Pour $\varepsilon > 0$ on a donc, par définition de suite de Cauchy, qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon \quad \forall n, m \geq N. \quad (5.4)$$

Donc, pour $k \in \mathbb{N}$ on a

$$d(x_k, x_N) \leq \max_{\ell \in \llbracket 1, N \rrbracket} d(x_\ell, x_N) + \varepsilon. \quad (5.5)$$

En particulier, comme le max est sur un ensemble fini, il existe $c > 0$ tel que $d(x_k, x_N) \leq c$. Finalement, par inégalité triangulaire, on a

$$d(x_k, x_\ell) \leq d(x_k, x_N) + d(x_N, x_\ell) \leq 2c, \quad \forall k, \ell \in \mathbb{N}. \quad (5.6)$$

Ceci prouve que $\text{diam}\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \leq 2c$ et donc l'énoncé. \square

La propriété suivante est très utile dans la pratique, car elle simplifie le fait de vérifier la convergence d'une suite de Cauchy.

Proposition 5.3. *Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ une suite de Cauchy et $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ une suite extraite. Alors, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente si et seulement si $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ converge.*

Démonstration. La convergence de $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente, suit immédiatement de la Proposition 4.4. Supposons maintenant que $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ est convergente à x_∞ . L'inégalité triangulaire nous dit que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$d(x_n, x_\infty) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x_\infty), \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (5.7)$$

Soit $\varepsilon > 0$. La convergence de $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ implique qu'il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que $d(x_{n_k}, x_\infty) < \varepsilon/2$ si $k \geq K$. Au même temps, la définition de suite de Cauchy nous dit qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $d(x_n, x_m) < \varepsilon/2$ si $n, m \geq N$. Comme $k \mapsto n_k$ est strictement croissante par définition de suite extraite, il existe donc $\bar{k} \geq K$ tel que $n_{\bar{k}} \geq N$. Donc, par (5.7) on complète la démonstration. \square

5.2 Espaces complets

On rappelle le théorème suivant, déjà vu l'année passée, et valable pour la convergence de suite de réels par rapport à la distance standard.

Théorème 5.4 (Critère de Cauchy). *Si une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels est de Cauchy, alors elle est convergente.*

Ce théorème n'est plus vrai si on remplace (\mathbb{R}, d_s) avec un espace métrique général, comme on montre dans l'exemple suivant.

Exemple 5.1. On considère l'espace métrique $((0, 1], d_s)$. La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset (0, 1]$, $x_n = \frac{1}{n+1}$, est de Cauchy mais n'est pas convergente dans $(0, 1]$. En effet, soit $\iota : ((0, 1], d_s) \rightarrow (\mathbb{R}, d_s)$ l'inclusion de $(0, 1]$ dans \mathbb{R} . On vérifie aisément qu'elle est continue. Comme $\iota(x_n) = x_n$, si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente dans $((0, 1], d_s)$ à x_∞ , elle est convergente aussi dans (\mathbb{R}, d_s) à $\iota(x_\infty) = x_\infty$. Toutefois, est immédiat observer que $x_n \rightarrow 0$ dans (\mathbb{R}, d_s) . Par unicité de la limite on devrait donc avoir $x_\infty = 0 \in (0, 1]$, qui est absurde.

Définition 5.2. On dit que l'espace métrique (X, d) est *complet* si toute suite de Cauchy de X est convergente dans X .

On peut interpréter la complétude comme le fait de n'avoir pas des trous. En effet, le concept de suite de Cauchy nous permet, dans un certain sens, de capter ces trous sans jamais sortir de l'espace.

Remarque 5.2. Le Théorème 5.4 montre que (\mathbb{R}, d_s) est un espace métrique complet.

Typiquement, pour montrer qu'un espace est complet on applique le procédé suivant :

1. On fixe une suite de Cauchy quelconque ;

2. On cherche de trouver une intuition pour la limite ;
3. On prouve que la candidate limite est bien dans l'espace ;
4. On montre que la suite converge effectivement à la candidate limite.

On commence par donner un résultat général, qui nous montrera comment appliquer le chemin ci-dessus.

Proposition 5.5. *Soit (X, d) un espace métrique complet et soit $Y \subset X$. Les énoncés suivants sont équivalents.*

- i. A est fermé ;
- ii. L'espace métrique $(A, d|_A)$ est complet.

Démonstration. On suppose que A soit fermé et on fixe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de Cauchy par rapport à $d|_A$. Par définition de $d|_A$, on a que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy comme suite de (X, d) . Donc, elle converge à un point $x_\infty \in X$. Car A est fermé dans X , on a que $x_\infty \in A$. Donc A est complet.

Supposons maintenant que $(A, d|_A)$ soit complet et fixons une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente à $x_\infty \in X$. En particulier, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans (X, d) et donc dans $(A, d|_A)$. Par complétude de $(A, d|_A)$ la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite $a \in A$ par rapport à $d|_A$. Mais alors a est limite de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aussi par rapport à d et, par unicité de la limite, $x_\infty = a \in A$. Donc, A est fermé. \square

Avant d'étudier la complétude des espaces métriques introduits dans le Chapitre 2, on montre avec l'exemple suivant que la notion de complétude est une notion métrique et non seulement topologique.

Exemple 5.2. La distance standard d_s sur \mathbb{R} est topologiquement équivalent à la distance

$$d(x, y) = \left| \arctan(x) - \arctan(y) \right|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (5.8)$$

En effet, dans le langage du Théorème 4.14, d est la distance induite par la fonction $\arctan : (\mathbb{R}, d_s) \rightarrow ((-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), d_s)$, qu'on vérifie aisément être un homéomorphisme. Toutefois, (\mathbb{R}, d_s) est complet, tandis que (\mathbb{R}, d) ne l'est pas. Cela suit soit en observant que la complétude de (\mathbb{R}, d) est équivalente à celle de $((-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), d_s)$, qui n'est pas complet car $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \subset \mathbb{R}$ n'est pas fermé, soit, d'une façon plus directe, en montrant que la suite $(n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ est de Cauchy par rapport à d et non convergente.

En effet on montrera comme exercice le résultat suivant.

Proposition 5.6. *Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques et soit $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ une fonction bijective continue et telle que f^{-1} est uniformément continue. Alors, si (X, d_X) est complet, de même est vrai pour (Y, d_Y) .*

Corollaire 5.7. *Soient d_1 et d_2 deux métriques Lipschitz-équivalentes sur X . Alors, (X, d_1) est complet si et seulement si (X, d_2) est complet.*

5.2.1 Complétude des exemples

On commence avec la distance discrète.

Proposition 5.8. *Soit X un ensemble et d_{discr} la distance discrète sur X . Alors, (X, d_{discr}) est complet.*

Démonstration. L'énoncé suit car $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ est de Cauchy si et seulement si il existe $x_\infty \in X$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que $x_n = x_\infty$ pour tout $n \geq N$. En effet, cela implique banalement que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente. \square

Pour traiter les evn de dimension finie on considère ce résultat.

Proposition 5.9. *Soient (X_1, d_1) et (X_2, d_2) deux espaces métriques complets. Soit $X = X_1 \times X_2$ et considérons la distance d_p sur X définie dans l'Exercice 4.7. Alors, pour tout $p \in [1, +\infty]$, l'espace métrique (X, d_p) est complet.*

Démonstration. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ une suite de Cauchy. Si on note $\pi_i : X \rightarrow X_i$ la projection standard, on a par définition de d_p que

$$d_i(\pi(x_n), \pi(x_m)) \leq d_p(x_n, x_m), \quad i = 1, 2. \quad (5.9)$$

Ceci permet de montrer que $(\pi_i(x_n))_{n \in \mathbb{N}} \subset X_i$ est de Cauchy et donc qu'elle converge par complétude de (X_i, d_i) . Car d_p est une métrique produit, on a donc que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente dans X . \square

Corollaire 5.10. *L'evn $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ est complet pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [1, +\infty]$.*

Pour montrer qu'un espace n'est pas complet, il suffit de trouver une suite de Cauchy qui n'est pas convergente.

Proposition 5.11. *Soit $1 \leq p < +\infty$. L'evn $(C([0, 1]), \|\cdot\|_p)$ n'est pas complet.*

Démonstration. On se contente de montrer le résultat pour $p = 1$, le cas $p > 1$ étant essentiellement pareil. De plus, pour simplifier la notation, on montrera que $(C([-1, 1]), \|\cdot\|_1)$ n'est pas complet. Ceci est clairement équivalent à l'énoncé, car on vérifie aisément que l'application $T : (C([0, 1]), \|\cdot\|_1) \rightarrow (C([-1, 1]), \|\cdot\|_1)$ définie par

$$Tf(x) = f\left(\frac{x+1}{2}\right) \quad \forall f \in C([0, 1]), \quad x \in [0, 2], \quad (5.10)$$

est bi-lipschitzienne.

On considère la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C([-1, 1])$ définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } -1 \leq x < -\frac{1}{n}, \\ nx & \text{si } -\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ 1 & \text{si } \frac{1}{n} < x \leq 1. \end{cases} \quad (5.11)$$

Montrons que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy. À cet effet, il suffit de poser $n, p \in \mathbb{N}$ et calculer

$$\begin{aligned} \|f_n - f_{n+p}\|_1 &= \int_{-1}^1 |f_n(x) - f_{n+p}(x)| dx \\ &= 2 \int_0^{\frac{1}{n}} (f_n(x) - f_{n+p}(x)) dx \\ &\leq 2 \int_0^{\frac{1}{n}} f_n(x) dx \\ &\leq \frac{1}{n}. \end{aligned} \tag{5.12}$$

Supposons par l'absurde qu'il existe $g \in C([-1, 1])$ tel que $f_n \rightarrow g$ pour $n \rightarrow +\infty$. On a donc pour tout $n \geq 1/\varepsilon$,

$$\int_{\varepsilon}^1 |g(x) - 1| dx \leq \|g - f_n\|_1 + \int_{\varepsilon}^1 |f_n(x) - 1| dx = \|g - f_n\|_1. \tag{5.13}$$

Passer à la limite pour $n \rightarrow +\infty$ et pour $\varepsilon \rightarrow 0$ montre que $\int_0^1 |g(x) - 1| dx = 0$. Comme $x \mapsto |g(x) - 1|$ est une fonction continue et positive sur $[0, 1]$ on a donc $g \equiv 1$ sur $[0, 1]$. Le même raisonnement permet de montrer aussi que $g \equiv -1$ sur $[-1, 0]$. Ceci contredit la continuité de g et clôt la démonstration. \square

L'exemple suivant montre qu'il n'est pas suffisant d'en trouver une qui converge à un élément hors de l'espace, mais qu'il faut tout à fait montrer qu'on converge pas à un élément de l'espace. En effet, l'unicité de la limite n'est pas vrai pour les éléments hors de l'espace.

Exemple 5.3. Considérons la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C([0, 1])$ définie par $f_n(x) = x^n$. On peut montrer que cette suite est de Cauchy par rapport à la norme $\|\cdot\|_1$. De plus, si on pose

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < 1; \\ 1 & \text{si } x = 1, \end{cases} \tag{5.14}$$

on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 |f_n(x) - g(x)| dx = 0$ et $g \notin C([0, 1])$.

Toutefois, ceci n'est pas suffisant pour montrer que $(C([0, 1]), \|\cdot\|_1)$ n'est pas complet. En effet, c'est facile de montrer que $\|f_n\|_1 \rightarrow 0$ et donc $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien convergente à la fonction nulle.

On passe maintenant à montrer la complétude de certains espaces de dimension infinie.

Proposition 5.12. *L'espace $(\ell^\infty(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ est complet.*

Démonstration. Soit $(u^k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \ell^\infty(\mathbb{R})$ une suite de Cauchy. On remarque que chaque u^k est une suite, qu'on notera

$$u^k = (u_n^k)_{n \in \mathbb{N}}. \tag{5.15}$$

Le fait que $(u^k)_{k \in \mathbb{N}}$ soit de Cauchy s'exprime par

$$\forall \varepsilon > 0, \exists K \in \mathbb{N} \quad \text{t.q.} \quad \|u^k - u^\ell\|_\infty \leq \varepsilon \quad \forall k > K, \ell \in \mathbb{N}. \quad (5.16)$$

On rappelle que $\|u^k - u^\ell\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n^k - u_n^\ell|$. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$ fixé on a $|u_n^k - u_n^\ell| \leq \|u^k - u^\ell\|_\infty$. Donc,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists K \in \mathbb{N} \quad \text{t.q.} \quad |u_n^k - u_n^\ell| \leq \varepsilon \quad \forall k, \ell > K, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (5.17)$$

C.-à-d., pour tout $n \in \mathbb{N}$ la suite $(u_n^k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ est de Cauchy dans (\mathbb{R}, d_s) . Puisque (\mathbb{R}, d_s) est complet, il existe u_n^∞ tel que $u_n^k \rightarrow u_n^\infty$ pour $k \rightarrow +\infty$.

On a donc identifié une candidat limite : la suite $u^\infty = (u_n^\infty)_{n \in \mathbb{N}}$. Pour montrer que $u^p \rightarrow u^\infty$ dans $\ell^\infty(\mathbb{R})$, on commence par montrer que $u^\infty \in \ell^\infty(\mathbb{R})$. Par (5.17), en passant à la limite pour $k \rightarrow +\infty$ on obtient que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists K > 0 \quad \text{t.q.} \quad |u_n^\infty - u_n^\ell| \leq \varepsilon \quad \forall \ell \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (5.18)$$

Donc, $(u^\infty - u^\ell) \in \ell^\infty(\mathbb{R})$. Comme $\ell^\infty(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel et $u^\ell \in \ell^\infty(\mathbb{R})$, on a $u^\infty = (u^\infty - u^\ell) + u^\ell \in \ell^\infty(\mathbb{R})$.

Finalement, le fait que $u^k \rightarrow u^\infty$ pour $k \rightarrow +\infty$, suit en passant au sup pour $n \in \mathbb{N}$ dans (5.18). En effet, on a le droit de le faire car K ne dépend pas de n . \square

Remarque 5.3. Cette méthode est assez générale. L'idée est de considérer une suite de Cauchy de $\ell^\infty(\mathbb{R})$ et d'essayer de se ramener à une suite de Cauchy de \mathbb{R} (ou un autre espace complet). Ensuite, on utilise le fait que \mathbb{R} est un espace complet, ce qui nous fournit une première notion de convergence. Il reste ensuite à déduire de cette information (lorsque cela est possible) que la suite de Cauchy de $\ell^\infty(\mathbb{R})$ converge au sens de la norme dont $\ell^\infty(\mathbb{R})$ est muni et que sa limite est bien dans $\ell^\infty(\mathbb{R})$.

La preuve du résultat suivant est similaire.

Proposition 5.13. *L'env $(C([0, 1], \|\cdot\|_\infty)$ est complet.*

Démonstration. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $(C([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$. Alors,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{t.q.} \quad \|f_n - f_m\|_\infty \leq \varepsilon \quad \forall n, m \geq N. \quad (5.19)$$

Par conséquent, il est immédiat que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{t.q.} \quad |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon \quad \forall n, m \geq N, \quad \forall x \in [0, 1]. \quad (5.20)$$

Cette inégalité traduit le fait qu'à $x \in [0, 1]$ fixé, la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ est une suite de Cauchy dans (\mathbb{R}, d_s) . Par conséquent, puisque (\mathbb{R}, d_s) est complet, cette suite est convergente dans \mathbb{R} . On note $f(x)$ sa limite, ce qui définit une application $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$.

Comme dans le cas précédent il nous reste à montrer que $f \in C([0, 1])$ et que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge à f par rapport à $\|\cdot\|_\infty$. La deuxième assertion est presque immédiate car

$(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy. Donc, on peut faire tendre m vers l'infini dans (5.20) et passer au sup pour $x \in [0, 1]$ pour obtenir

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{t.q.} \quad \sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq N. \quad (5.21)$$

Il reste à montrer que $f \in C([0, 1])$. À cet effet, on se donne $x_0 \in [0, 1]$ et on montre que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. Observons que, grace à l'inégalité triangulaire, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq 2 \sup_{y \in [0,1]} |f_n(y) - f(y)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Par continuité de f_n , on a que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \quad \text{t.q.} \quad |f_n(x) - f_n(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{si } |x - x_0| \leq \delta. \quad (5.23)$$

Soit maintenant $n \geq N$, donné par (5.21) avec $\varepsilon/3$. En continuant (5.22) a donc démontré que pour tout $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tel que

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \frac{2}{3}\varepsilon + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \quad \text{si } |x - x_0| \leq \delta. \quad (5.24)$$

En particulier, $f \in C([0, 1])$ et clot la démonstration. □

5.3 Le théorème de point fixe et ses applications

Lorsque on a une application $f : X \rightarrow X$, est naturel et très important de comprendre si f admet des points fixes, c-à-d si $f(x_*) = x_*$ pour quelque $x_* \in X$. Dans cette section on montrera une condition suffisante pour l'existence (et l'unicité) d'un tel point fixe, et on donnera deux applications concrete de ce résultat.

Donnons au préalable la notion suivante.

Définition 5.3. Soit (X, d) un espace métrique. Une application $f : (X, d) \rightarrow (X, d)$ est dite *contractante* s'il existe $\alpha \in (0, 1)$ tel que

$$d(f(x), f(x')) \leq \alpha d(x, x'), \quad \forall x, x' \in X. \quad (5.25)$$

On a donc le théorème suivant, qu'on appel parfois de Banach-Caccioppoli.

Théorème 5.14 (Point fixe pour applications contractantes). *Soit (X, d) un espace métrique complet et soit $f : (X, d) \rightarrow (X, d)$ une application contractante. Alors, il existe et il est unique $x_* \in X$ tel que $f(x_*) = x_*$.*

Démonstration. On démontre d'abord que l'éventuel point fixe $x_\star \in X$ est unique. À cet effet, on suppose qu'il existe $x, x' \in X$ tels que $f(x) = x$ et $f(x') = x'$. Comme f est contractante, on a donc

$$0 \leq d(x, x') = d(f(x), f(x')) \leq \alpha d(x, x'). \quad (5.26)$$

Le fait que $\alpha < 1$ implique donc que $d(x, x') = 0$ et donc que $x = x'$.

On passe maintenant à démontrer l'existence du point fixe. Soit $x_0 \in X$ un point quelconque, et définissons la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par la récurrence $x_{n+1} = f(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$. On vise à montrer que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge à un point fixe. À cet effet, on commence par montrer que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy. Soit $k \in \mathbb{N}$ et calculons

$$\begin{aligned} d(x_k, x_{k+1}) &= d(f(x_{k-1}), f(x_k)) \\ &\leq \alpha d(x_{k-1}, x_k) \\ &= \alpha d(f(x_{k-2}), f(x_{k-1})) \\ &\leq \alpha^2 d(x_{k-2}, x_{k-1}) \\ &\vdots \\ &\leq \alpha^k d(x_0, x_1). \end{aligned} \quad (5.27)$$

Donc, par l'inégalité triangulaire, pour tout $n, p \in \mathbb{N}$ on a

$$d(x_n, x_{n+p}) \leq \sum_{\ell=0}^{p-1} d(x_{n+\ell}, x_{n+\ell+1}) \leq \sum_{\ell=0}^{p-1} \alpha^{n+\ell} d(x_0, x_1) \quad (5.28)$$

Car $\alpha < 1$, on a que $\sum_{\ell=0}^{+\infty} \alpha^\ell = 1/(1-\alpha)$. On peut donc continuer le calcul ci-dessus et obtenir

$$d(x_n, x_{n+p}) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_0, x_1), \quad \forall n, p \in \mathbb{N}. \quad (5.29)$$

Comme $\alpha^n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$, on a donc montré que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy.

Puisque X est complet la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc convergente à un point $x_\star \in X$. Il reste à montrer que x_\star est un point fixe de f . Ceci suit aisément du fait que, par continuité de f et de d ,

$$d(x_\star, f(x_\star)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_\star, f(x_n)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_\star, x_{n+1}) = d(x_\star, x_\star) = 0. \quad \square$$

Remarque 5.4. Une conséquence de la démonstration, est que, sous les hypothèses du théorème, pour tout $x_0 \in X$ la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $x_{n+1} = f(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$, est convergente à l'unique point fixe x_\star de f . En passant à la limite pour $p \rightarrow +\infty$ dans (5.29), il est même possible quantifier la vitesse de convergence :

$$d(x_n, x_\star) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_0, f(x_0)), \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (5.30)$$

On va maintenant donner deux applications intéressantes du théorème de point fixe. On en verra des autres dans les exercices.

5.3.1 La suite de Fibonacci et le nombre d'or

On rappelle que la *suite de Fibonacci* est la suite de nombres naturels $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ définie par la relation de récurrence suivante :

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (5.31)$$

On a donc $u = (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots)$.

On montrera la proposition suivante.

Proposition 5.15. *On a*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \phi, \quad \text{où } \phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ est le nombre d'or.} \quad (5.32)$$

Démonstration. Des simples raisonnements par récurrence, nous permet de montrer que la suite de Fibonacci est strictement croissante, et que donc $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$. En posant $v_n = u_{n+1}/u_n$, $n \in \mathbb{N}^*$, on commence donc par démontrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

Par définition de u on a que

$$v_1 = 1, \quad v_{n+1} = 1 + \frac{1}{v_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \quad (5.33)$$

Autrement dit, on a $v_{n+1} = f(v_n)$, $n \in \mathbb{N}^*$, où $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x}. \quad (5.34)$$

L'idée est de trouver un interval fermé $I \subset \mathbb{R}$ tel que

1. $f(I) \subset I$, et donc on peut considérer $f : I \rightarrow I$;
2. $f : (I, d_s) \rightarrow (I, d_s)$ est contractante;
3. il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $v_{n_0} \in I$.

En effet, cela nous permettra d'appliquer le théorème du point fixe (et le Remarque 5.4) pour démontrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers le seul point fixe de f dans I , qu'on devra calculer explicitement.

Montrons que $I = [3/2, 2]$ satisfait les propriétés souhaitées. Nous commençons par observer que $f'(x) = -1/x^2$ pour tout $x \neq 0$. En particulier, f est décroissante et donc $f(I) \subset [f(2), f(3/2)] = [3/2, 5/3] \subset I$. Ceci montre la propriété 1. De plus, comme si $\varepsilon > 0$ on a $|f'(x)| \leq 1/\varepsilon^2 < 1$ pour tout $x \in [1 + \varepsilon, +\infty)$, l'inégalité des accroissements finis nous donne que $f : (I, d_s) \rightarrow (I, d_s)$ est contractante. On a donc la propriété 2. Finalement, on a $v_2 = 2 \in I$, ce qui montre la propriété 3.

Par le théorème du point fixe on a donc que $v_n \rightarrow \phi \in I$ où $f(\phi) = \phi$. Cette propriété est équivalente au fait que

$$\phi^2 = \phi + 1. \quad (5.35)$$

La seule solution positive de cette équation est le nombre d'or, ce qui clot la démonstration. \square

Existence et unicité des solutions pour équations différentielles

L'application classique du théorème de point fixe est le résultat suivant.

Théorème 5.16 (Cauchy-Lipschitz). *Soit $G \subset \mathbb{R}^2$ ouvert et $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Étant donné $(x_0, t_0) \in G$, considérons l'équation différentielle suivante :*

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = f(x(t), t), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (\text{EDO})$$

Supposons, de plus, que f soit lipschitzienne dans la première variable, uniformément par rapport à la deuxième. C.-à-d., on suppose qu'il existe $M > 0$ tel que

$$|f(x_1, t) - f(x_2, t)| \leq M|x_1 - x_2|, \quad \forall x_1, x_2, t \text{ t.q. } (x_1, t), (x_2, t) \in G. \quad (5.36)$$

Alors, il existe une unique solution $t \mapsto x(t)$ à (EDO), définie dans un voisinage de t_0 .

Démonstration. Une intégration membre à membre de (EDO), montre qu'il est équivalent à l'équation intégrale suivante :

$$x(t) = t_0 + \int_{t_0}^t f(x(t), t) dt. \quad (5.37)$$

En vertu de la continuité de f , il existent un domaine $G' \subset G$, $(x_0, t_0) \in G'$ et $K > 0$ tels que $|f(x, t)| \leq K$ pour tout $(x, t) \in G'$. C'est aussi clair que, si $\eta, \delta > 0$ sont suffisamment petits, en posant $I = [x_0 - \eta, x_0 + \eta]$ et $J = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ on a $I \times J \subset G'$.

Soit $C(I; J) = \{\varphi : I \rightarrow J \mid \varphi \text{ est continue}\}$. Cette espace est fermé dans $C(I)$, et donc complet par rapport à la norme $\|\cdot\|_\infty$. Considérons à présent l'application T définie par $T\varphi = \psi$ où

$$\psi(t) = t_0 + \int_{t_0}^t f(\varphi(t), t) dt. \quad (5.38)$$

Par (5.37), les solutions de (EDO) sont exactement les points fixes de l'application T . Donc, pour compléter la preuve de l'énoncé il nous suffit de montrer qu'on peut choisir η, δ en sorte que $T : C(I; J) \rightarrow C(I; J)$ et que T est une contraction, ce qui permet d'appliquer le théorème du point fixe.

On commence par montrer que $T\varphi \in C(I; J)$ si $\varphi \in C(I; J)$ si $\delta \leq \eta/K$. En effet, dans ce cas on a

$$|\psi(t) - t_0| = \left| \int_{t_0}^t f(\varphi(t), t) dt \right| \leq K|t - t_0| \leq K\delta \leq \eta \quad \forall t \in J. \quad (5.39)$$

Montrons que T est une contraction si on pose $M\delta < 1$. À cet effet, soient $\varphi_1, \varphi_2 \in C(I; J)$, fixons $t \in J$ et, pour $\psi_1 = T\varphi_1$ et $\psi_2 = T\varphi_2$, calculons

$$\begin{aligned} |\psi_1(t) - \psi_2(t)| &\leq \int_{t_0}^t |f(\varphi_1(t), t) - f(\varphi_2(t), t)| dt \\ &\leq M \int_{t_0}^t |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| dt \leq M\delta \|\varphi_1 - \varphi_2\|_\infty. \end{aligned} \quad (5.40)$$

En passant au sup on a donc $\|T\varphi_1 - T\varphi_2\|_\infty \leq M\delta\|\varphi_1 - \varphi_2\|_\infty$ et, car $M\delta < 1$, l'application T est une contraction. \square

5.4 Exercices

Suites de Cauchy

Exercice 5.1. Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques et $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ une fonction uniformément continue. Montrer que si $(x_n)_n \subset X$ est une suite de Cauchy, de même est vrai pour $(f(x_n))_n \subset Y$.

Exercice 5.2. Soit (X, d) un espace métrique. Montrer que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ est de Cauchy si

$$\sum_{n=0}^{+\infty} d(x_n, x_{n+1}) < +\infty. \quad (5.41)$$

La réciproque est-elle vraie ?

Espaces complets

Exercice 5.3. Montrer la Proposition 5.6.

Exercice 5.4. Montrer que $(\ell^p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_p)$ est complet si $p < +\infty$.

Exercice 5.5. On considère les espaces vectoriels suivants :

$$E_k = \left\{ x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*} \mid \sum_{n=1}^{+\infty} n^k |x_n| < +\infty \right\}, \quad k \in \mathbb{N}^*. \quad (5.42)$$

1. Montrer que la fonction suivante est une norme sur E_k , $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\|x\|_k = \sum_{n=1}^{+\infty} n^k |x_n|; \quad (5.43)$$

2. Montrer que E_{k+1} est un sev dense et propre de $(E_k, \|\cdot\|_k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$;
3. En déduire que $(E_{k+1}, \|\cdot\|_k)$ n'est pas un espace de Banach pour tout $k \in \mathbb{N}^*$;
4. Montrer que $(E_k, \|\cdot\|_k)$ est un espace de Banach pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 5.6. Soit (X, d) un espace métrique. Si (X, d) est complet et $(\bar{B}_n)_n$ est une suite de boules fermées $\bar{B}_n = \bar{B}(x_n, r_n)$ tels que $\bar{B}_{n+1} \subset \bar{B}_n$ pour tout n et $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$, montrer que

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bar{B}_n \neq \emptyset. \quad (5.44)$$

(*) Prouver que cette condition est équivalente à la complétude de (X, d) .

Exercice 5.7. Soit (E, \mathfrak{n}) un evn.

1. Montrer que B , la boule unité fermée de E ,
 - est convexe, fermée.
 - symétrique par rapport à 0.
 - Que $E = \bigcup_{\lambda > 0} \lambda B$ (ici on denote $\lambda B = \{\lambda x \mid x \in B\}$).
 - $\{0\} = \bigcap_{\lambda > 0} \lambda B$
2. Montrer que si une partie de E vérifie les propriétés précédentes, il existe une norme \mathfrak{n}_2 sur E pour laquelle B est la boule unité fermée. La norme \mathfrak{n}_2 est équivalente à \mathfrak{n} ?

Le théorème de point fixe et ses applications

Exercice 5.8. Définir deux applications $T, R : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tels que

$$|T(x) - T(y)| < |x - y|, \quad |R(x) - R(y)| \geq 2|x - y|, \quad (5.45)$$

mais avec aucun point fixe en \mathbb{R} .

Exercice 5.9. Considerons l'application $T : C([0, 1]) \rightarrow C([0, 1])$ défini par

$$Tf(x) := \int_0^x t^2 f(t) dt + \frac{1}{2}, \quad \forall f \in C([0, 1]). \quad (5.46)$$

1. Montrer que T est une application contractante par rapport à la norme $\|\cdot\|_\infty$ et en déduire qu'elle admet un point fixe $f_0 \in C([0, 1])$;
2. Montrer que $\|f_0\| \leq 1$.

Exercice 5.10. Soit (X, d) un espace métrique complet. Pour $f : (X, d) \rightarrow (X, d)$ et $n \in \mathbb{N}$ on note $f^n(x) = f \cdot \dots \cdot f(x)$ l' n -ième itérée de f . Montrer que s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que f^n est contractante, alors il existe et il est unique $x_\star \in X$ tel que $f(x_\star) = x_\star$.

Exercice 5.11. Soit $K : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et $\varphi \in C([0, 1])$.

1. Montrer que pour $\lambda > 0$ assez petit, il existe un unique $f \in C([0, 1])$ tel que

$$f(x) = \lambda \int_0^1 K(x, y) f(y) dy + \varphi(x). \quad (5.47)$$

2. Montrer que pour tout $\lambda > 0$ il existe un unique $f \in C([0, 1])$ tel que

$$f(x) = \lambda \int_0^x K(x, y) f(y) dy + \varphi(x). \quad (5.48)$$

Exercice 5.12 (Cas particulier du théorème de point fixe de Brouwer). Considérons (\mathbb{R}^n, d_s) . Soit $f : B(0, 1) \rightarrow B(0, 1)$ telle que $d_s(f(x), f(y)) \leq d_s(x, y)$ pour tout $x, y \in B(0, 1)$. Montrer que alors f a un point fixe dans $B(0, 1)$.

6 Compacité

On rappelle le résultat suivant, déjà vu l'année passée, et valable dans (\mathbb{R}, d_s) . On présente une preuve basée sur l'Exercice 5.6.

Théorème 6.1 (Bolzano-Weierstrass). *Toute suite bornée de réels admet une sous-suite convergente.*

Démonstration. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ une suite bornée. On suppose que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne soit pas définitivement constante, sinon l'énoncé est trivial. Notons $m = \inf_n x_n$ et $M = \sup_n x_n$. Comme $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée et non définitivement constante, on a $-\infty < m < M < +\infty$. Nous construisons maintenant une suite d'intervalles emboîtés de la façon suivante. Posons $a_0 = m$, $b_0 = M$, et $I_0 = [a_0, b_0]$. En suite, étant donné $I_n = [a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{N}$, on choisit $I_{n+1} \subset I_n$ comme l'intervalle (ou un des intervalles) entre $[a_n, (a_n + b_n)/2]$ et $[(a_n + b_n)/2, b_n]$ qui contient une infinité de points de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On observe que un tel intervalle existe, car $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas définitivement constante.

On définit maintenant la sous-suite $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \subset (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en choisissant $x_{n_k} \in I_k$, $k \in \mathbb{N}^*$. Comme $|I_k| = b_k - a_k \rightarrow 0$, avec le même argument utilisé dans l'Exercice 5.6 et grâce à la complétude de \mathbb{R} , on démontre aisément que la sous-suite $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy et donc convergente. \square

6.1 Compacité séquentielle et ses propriétés

En effet la propriété de Bolzano-Weierstrass est tellement importante qu'elle inspire une définition.

Définition 6.1. Soit (X, d) un espace métrique. Une partie $A \subset X$ est *compacte* si de toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ on peut extraire une sous-suite convergente dans A . On dit que (X, d) est compact si $X \subset X$ est compact.

Exemple 6.1. Tout intervalle fermé et borné $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $-\infty < a < b < +\infty$, est compact dans (\mathbb{R}, d_s) . En effet, toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset [a, b]$ admet une sous-suite $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ convergente à $x_\infty \in \mathbb{R}$, par le théorème de Bolzano-Weierstrass. Comme $[a, b]$ est fermé, on a donc que $x_\infty \in [a, b]$.

Exemple 6.2. On vérifie aisément que (\mathbb{R}, d_s) n'est pas un espace compact. En effet, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = n$, $n \in \mathbb{N}$, n'admet pas de sous-suites convergentes. En effet, toute suite extraite sera non-bornée et donc non-convergente.

Proposition 6.2. *Soit (X, d) un espace métrique. Alors, une partie finie $A \subset X$ est compacte. De plus, si $d = d_{discr}$ est la distance discrète les parties finies de X sont les seules parties compactes.*

Démonstration. Soit $A \subset X$ une partie finie de X . Montrons que A est compacte. En effet, si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ est une suite de A , le principe de tiroirs implique qu'il existe une partie infinie $P \subset \mathbb{N}$ et $x_\infty \in A$ tels que $x_n = x_\infty$ si $n \in P$. Ordonner $P = (n_0, n_1, \dots, n_k, \dots)$ nous permet donc d'extraire la sous-suite $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, qui est constante et donc convergente.

Supposons maintenant que $d = d_{\text{discr}}$ et choisissons une partie $A \subset X$ non-finie. Ceci implique qu'il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ telle que $x_n \neq x_m$ pour tout $n, m \in \mathbb{N}$, $n \neq m$. Mais alors, $d(x_n, x_m) = 1$ si $n \neq m$. Comme cette propriété reste vraie pour toute sous-suite extraite de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, aucun entre elle pourra être de Cauchy. En particulier, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'admet pas de sous-suites convergentes et donc A n'est pas compacte. \square

On commence par montrer deux propriétés essentielles de la compacité.

Proposition 6.3. *Soit (X, d) un espace métrique et $A \subset X$ une partie compacte. Alors, A est fermée et bornée.*

Démonstration. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ telle que $x_n \rightarrow x_\infty \in X$. Par définition de partie compacte, il est possible d'extraire une sous-suite de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge à un élément $a_\infty \in A$. Par la Proposition 4.4 on obtient donc que $x_\infty = a_\infty \in A$ et, par conséquent, que A est fermé par caractérisation séquentielle des fermés.

Supposons maintenant que A ne soit pas borné, c.-à-d. que $\text{diam } d(x, y) = +\infty$. Par définition de diamètre, pour tout $x_0 \in A$ et $n \in \mathbb{N}$ il existe $x_n \in A$ tel que $d(x_n, x_0) \geq n$. Par compacité, il existe donc une sous-suite $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \subset (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge à $x_\infty \in A$. Toutefois ceci est absurde, en effet,

$$0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_n, x_\infty) \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_n, x_0) - d(x_0, x_\infty) \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} n - d(x_0, x_\infty) = +\infty. \quad \square$$

On verra que cette proposition est en effet une équivalence dans le cas des evn de dimension finie. Il faut quand même faire attention, car l'implication inverse est fautive en générale, comme on montre de suite.

Exemple 6.3. Soit (X, d_{discr}) un espace métrique discret. Il est évident que toute partie de X est borné, et il suit de l'Exemple 3.4 que toute partie de X est fermé. Donc, par la proposition 6.2 toute partie de X non finie sont bornée et fermée, mais non compacte.

Proposition 6.4. *Soit (X, d) un espace métrique et $A \subset X$ une partie compacte. Si $B \subset A$ est fermé, alors B est compact.*

Démonstration. C'est immédiat. En effet, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset B \subset A$ admet une sous-suite convergente dans A , par compacité de ce dernier. Comme B est fermé, cette limite appartient à B , qui est donc compact. \square

Proposition 6.5. *Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métrique compacts. Soit $Z = X \times Y$ et considérons une distance produit d sur X , dans le sens de l'Exercice 4.7. Alors, (Z, d) est compact.*

Démonstration. Soit $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset Z$ une suite. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $x_n = \pi_X(z_n) \in X$ et $y_n = \pi_Y(z_n)$ où $\pi_X : Z \rightarrow X$ et $\pi_Y : Z \rightarrow Y$ sont les projections. Alors, par compacité de X il existe $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \subset (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge à $x_\infty \in X$. De plus, par compacité de Y il existe $(y_{n_{k_\ell}})_{\ell \in \mathbb{N}} \subset (y_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ qui converge à $y_\infty \in Y$. Par la Proposition 4.4, on a $x_{n_{k_\ell}} \rightarrow x_\infty$. Donc, par définition de métrique produit, on a $z_{n_{k_\ell}} \rightarrow z_\infty = (x_\infty, y_\infty)$ dans Z . Cela montre que (Z, d) est compacte. \square

On peut finalement caractériser les parties compactes des evn de dimension finie.

Théorème 6.6 (Heine-Borel). *Les parties compactes d'un evn de dimension finie sont les parties fermées et bornées.*

Démonstration. Par la Proposition 6.3 il nous suffit de démontrer que si $A \subset E$ est fermé et borné, alors A est compact. Ceci est une conséquence immédiate du théorème de Bolzano-Weierstrass si $E = \mathbb{R}$. En effet, si $A \subset \mathbb{R}$ est borné, toute suite dans A est bornée aussi et donc admet une sous-suite convergente. Comme A est aussi fermé, la limite doit appartenir à A , qui est donc compact.

Supposons maintenant $E = \mathbb{R}^n$. Dans ce cas, est immédiat de vérifier que, car $\text{diam } A < +\infty$, il existe $M > 0$ tel que $A \subset \prod_{i=1}^n [-M, M]$. Or, $[-M, M] \subset \mathbb{R}$ est borné et fermé, et donc compact. Par la Proposition 6.5 $\prod_{i=1}^n [-M, M] \subset \mathbb{R}^n$ est donc compact. Étant A un fermé contenu dans un compact, il est donc compact par la Proposition 6.4. \square

On termine cette partie en remarquant le lien entre complétude et compacité.

Proposition 6.7. *Soit (X, d) un espace métrique et $A \subset X$ une partie compacte. Alors, $(A, d|_A)$ est un espace métrique complet.*

Démonstration. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ une suite de Cauchy. Par compacité de A elle admet donc une sous-suite convergente dans A , ce qui entraîne que toute la suite est convergente dans A grâce à la Proposition 5.3. \square

6.2 Continuité et compacité

Dans cette partie, nous commençons par étudier les images de compacts par des applications continues. Nous allons étudier en suite le lien entre compacité et continuité uniforme.

Proposition 6.8. *Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques, et $f : X \rightarrow Y$ une application continue. Soit $A \subset X$ une partie compacte. Alors, $f(A)$ est une partie compacte de Y .*

Démonstration. Soit $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset f(A)$ une suite. Alors, il existe $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ telle que $f(x_n) = y_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par compacité de A , on peut extraire une sous-suite $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \subset (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente à $x_\infty \in A$. Par continuité de f , on a donc que $f(x_{n_k}) = y_{n_k} \rightarrow f(x_\infty) \in f(A)$. Ceci montre que la sous-suite $(y_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \subset (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente, donc $f(A)$ est compact. \square

Corollaire 6.9. Soit (X, d) un espace métrique et $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Si $A \subset X$ est une partie compacte, il existe $x_m, x_M \in A$ tels que

$$f(x_m) = \min_{x \in A} f(x) \quad \text{et} \quad f(x_M) = \max_{x \in A} f(x). \quad (6.1)$$

Démonstration. À cause de la Proposition 6.8, $f(A)$ est compact et donc borné et fermé. Soit $M = \sup f(X)$. Comme $f(A)$ est borné, on a $M < +\infty$. De plus, par les propriétés du sup, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $y_\varepsilon \in X$ tel que $M - \varepsilon \leq y_\varepsilon \leq M$. En choisissant $\varepsilon = 1, 1/2, 1/3, \dots$ on obtient donc une suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset f(A)$ telle que $y_n \rightarrow M$. Comme $f(A)$ est fermé, on a donc que $M \in f(A)$. Donc il existe x_M tel que $f(x_M) = \max_{x \in A} f(x)$. De même pour le minimum. \square

Théorème 6.10 (Théorème de Heine). Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques, et $f : X \rightarrow Y$ une application continue. Si X est compact, alors f est uniformément continue.

Démonstration. Raisonnons par l'absurde, en supposant que f ne soit pas uniformément continue. C'est à dire, on suppose qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall \eta > 0, \exists (x, y) \in X \times X \text{ t.q. } d_X(x, y) \leq \eta \text{ et } d_Y(f(x), f(y)) \geq \varepsilon. \quad (6.2)$$

On peut donc construire, en faisant successivement prendre à η les valeurs $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$, une suite $((a_n, b_n))_{n \in \mathbb{N}} \subset X \times X$ telle que $d_X(a_n, b_n) \leq \frac{1}{n}$ et $d_Y(f(a_n), f(b_n)) \geq \varepsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Le produit de compacts étant encore compact, on en déduit que $X \times X$ est compact. Donc, il existe une sous-suite $((a_{n_k}, b_{n_k}))_{k \in \mathbb{N}}$ qui converge vers $(a_\infty, b_\infty) \in X \times X$, autrement dit $a_{n_k} \rightarrow a_\infty$ et $b_{n_k} \rightarrow b_\infty$. Mais puisque $d_X(a_{n_k}, b_{n_k}) \leq 1/n_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, on en déduit que $a_\infty = b_\infty$. Par continuité de f on a donc

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} f(a_{n_k}) = f(a_\infty) = f(b_\infty) = \lim_{k \rightarrow +\infty} f(b_{n_k}). \quad (6.3)$$

Une passage à la limite dans l'inégalité $d_Y(f(a_{n_k}), f(b_{n_k})) \geq \varepsilon$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, conduit donc à l'inégalité $0 \geq \varepsilon$, qui est absurde. Donc, f est uniformément continue sur X . \square

6.3 Précompacité et propriété de Borel-Lebesgue

Dans cette section on va démontrer la correcte généralisation du théorème de Heine-Borel, pour obtenir ainsi une caractérisation des compacts dans un espace métrique. On montrera aussi que la notion de compacte est une notion topologique, à travers la propriété de Borel-Lebesgue.

On commence par la définition suivante.

Définition 6.2. Une espace métrique (X, d) est *précompact* si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une quantité *finie* de points $x_1, \dots, x_n \in X$ tels que

$$X = \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \varepsilon). \quad (6.4)$$

On dit que une partie A de X est précompacte si $(A, d|_A)$ est précompact.

L'inégalité triangulaire implique immédiatement que tout espace précompact est borné. L'envers n'est pas vérifié, ceci est le cas de tout espaces (X, d_{discr}) où $\text{Card}(X) = +\infty$. On a aussi les exemples suivants.

Exemple 6.4. Soit $(\ell^2(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2)$ et considérons la sphere unité $\mathcal{S} = \{x \in \ell^2(\mathbb{R}) \mid \|x\|_2 = 1\}$. Évidemment, \mathcal{S} est borné. Montrons qu'elle n'est pas précompacte. À cet effet, on considère la suite $(e^j)_{j \in \mathbb{N}} \subset \ell^2(\mathbb{R})$, où pour $j \in \mathbb{N}$ on pose $e^j = (e_n^j)_n \subset \mathbb{R}$ est donnée par

$$e_n^j = \begin{cases} 1 & \text{si } j = n; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (6.5)$$

On a que $(e_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{S}$ et que $\|e_j - e_i\|_2 = \sqrt{2}$ si $j \neq i$. Posons $\varepsilon < \sqrt{2}/2$ et supposons qu'il existe $x_1, \dots, x_n \in \ell^2(\mathbb{R})$ tels que

$$\mathcal{S} \subset \bigcup_{k=1}^n B(x_k, \varepsilon). \quad (6.6)$$

Comme les boules à droite sont en nombre fini, il faut forcément que l'une entre eux contient e_i et e_j pour $i \neq j$. Disons, $e_i, e_j \in B(x_k, \varepsilon)$. Toutefois, ceci implique que

$$\|e_i - e_j\|_2 \leq \|e_i - x_k\|_2 + \|x_k - e_j\|_2 < 2\varepsilon < \sqrt{2}, \quad (6.7)$$

qui est absurde.

Exemple 6.5. Soit $(C([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$. La boule $B(0, r)$, qui est évidemment borné, n'est pas précompacte. Nous raisonnons par contradiction, en considérant $\varepsilon < r/2$ et en supposant qu'il existent f_1, \dots, f_n soient tels que

$$B(0, r) \subset \bigcup_{i=1}^n B(f_i, \varepsilon). \quad (6.8)$$

Ceci est équivalent à dire que pour tout $f \in C([0, 1])$ tels que $\|f\|_\infty < r$ on a $\min_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \|f - f_i\|_\infty < \varepsilon$. Nous fixons donc des points distincts $0 = t_1 < \dots < t_n = 1$. Observons que, car $\varepsilon < r/2$, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ il existe $y_i \in (-r, r)$ tel que $|y_i - f_i(t_i)| > \varepsilon$. Pour contredire (6.8) il suffit donc de considérer la fonction $f \in C([0, 1])$ affine par morceaux telle que $f(t_i) = y_i$. En effet,

$$\|f\|_\infty = \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} |y_i| < r \quad \text{et} \quad \|f - f_i\|_\infty \geq |y_i - f(t_i)| > \varepsilon, \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket. \quad (6.9)$$

Théorème 6.11. *Un espace métrique (X, d) est compact si et seulement si il est précompact et complet.*

Démonstration. On commence par supposer (X, d) compact. Par la Proposition 6.7, (X, d) est complet. On suppose maintenant que (X, d) ne soit pas précompact (c.-à-d., qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour toute partie finie $\{x_1, \dots, x_n\} \subset X$ il existe un élément $x \in X$ tel que $\min_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} d(x, x_i) > \varepsilon$) et on contredis sa compacité.

Soit $x_1 \in X$. Soit $x_2 \in X$ tel que $d(x_2, x_1) > \varepsilon$. Ainsi de suite on choisit $x_n, n \in \mathbb{N}$, comme un point tel que $\min_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} d(x_n, x_i) > \varepsilon$. On a donc construit une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $d(x_n, x_m) > \varepsilon$ pour tout $n, m \in \mathbb{N}$. Comme cette propriété reste vraie pour tout sous-suite de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ on obtient aisément qu'aucune sous-suite de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy, ce qui implique qu'aucune sous-suite extraite est convergente. Cela contredit la compacité de (X, d) .

On suppose maintenant que (X, d) soit précompact et complet et soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$. Supposons que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne soit pas définitivement constante, sinon on a terminé. En fixant $\varepsilon = 1$ dans la définition de précompacité, on obtient $y_{1,1}, \dots, y_{1,N_1} \in X$ tel que

$$X = \bigcup_{i=1}^{N_1} B(y_{1,i}, 1). \quad (6.10)$$

Comme $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas définitivement constante, il existe k tel que la boule $B(y_{1,k_1}, 1)$ contient une infinité d'éléments de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On choisit donc $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $x_{n_1} \in B(y_{1,k_1}, 1)$. De suite, on choisit $\varepsilon = 1/2$, on trouve les points $y_{2,1}, \dots, y_{2,N_2} \in X$ correspondant, et on répète la procédure en choisissant $n_2 > n_1$ tel que $x_{n_2} \in B(y_{2,k_2}, 1/2) \cap B(y_{1,k_1}, 1)$. Ainsi de suite, on trouve une suite de points $(y_{n,k_n})_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ et une sous-suite $(x_{n_\ell})_{\ell \in \mathbb{N}} \subset (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tels que

$$x_{n_\ell} \in \bigcap_{m=1}^{\ell} B\left(y_{m,k_m}, \frac{1}{m}\right). \quad (6.11)$$

On montre alors que $(x_{n_\ell})_{\ell \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy comme dans l'Exercice 5.6. La complétude de (X, d) implique alors que cette sous-suite est convergente et donc que (X, d) est compact. \square

Remarque 6.1. Dans la deuxième partie de la preuve on utilise la même idée qu'on a exploité pour démontrer Bolzano-Weierstrass.

Corollaire 6.12. *Soit (X, d) un espace métrique complet et $A \subset X$ une partie précompacte. Alors, \bar{A} est compact.*

Démonstration. Il est évident que si A est précompact de même est vraie pour sa adhérence \bar{A} . Comme \bar{A} est fermé et (X, d) est complet, on a que $(\bar{A}, d|_{\bar{A}})$ est complet. Donc, par le Théorème 6.11, \bar{A} est compact. \square

On verra en exercice que, comme suggère par les Exemples 6.4 et 6.5, pour les evn de dimension infinie les boules fermés ne sont *jamais* compacte.

On passe maintenant à donner une caractérisation topologique de compacité.

Définition 6.3. Soit (X, d) un espace métrique, soit $A \subset X$, et soit $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I} \subset 2^X$ une famille de parties de X .

1. On dit que \mathcal{U} est un *recouvrement* de A lorsque

$$\bigcup_{i \in I} U_i \supset A. \quad (6.12)$$

2. Si \mathcal{U} est un recouvrement et tout $U_i \in \mathcal{U}$ est ouvert, on dira que \mathcal{U} est un *recouvrement ouvert*.
3. De plus, si $\text{Card}(I) < +\infty$, on dit que \mathcal{U} est un *recouvrement fini*.
4. Si $J \subset I$ et si $\{U_j\}_{j \in J}$ est encore un recouvrement de A , on dira que $\{U_j\}_{j \in J}$ est un *sous-recouvrement* de \mathcal{U} .

Théorème 6.13 (Caractérisation topologique de compacité). *Soit (X, d) un espace métrique et soit $A \subset X$. Alors, A est compact si et seulement si la propriété de Borel-Lebesgue est satisfaite : “tout recouvrement ouvert de A admet un sous-recouvrement fini”.*

Démonstration. Il suffit de considérer le cas $A = X$.

Si la propriété de Borel-Lebesgue est satisfaite, la précompacité suit immédiatement en considérant, pour $\varepsilon > 0$, le recouvrement ouvert $\mathcal{U} = \{B(x, \varepsilon)\}_{x \in X}$. Pour démontrer la complétude de (X, d) , on utilise la caractérisation donnée dans l'Exercice 5.6 et on procède par l'absurde. À cet effet, soient $\bar{B}_n = \bar{B}(x_n, r_n)$, $n \in \mathbb{N}$ et $r_n > 0$, des boules fermées telles que $\bar{B}_{n+1} \subset \bar{B}_n$, $\lim_n r_n = 0$, et $\bigcap_n \bar{B}_n = \emptyset$. On pose $U_n = X \setminus \bar{B}_n$, $n \in \mathbb{N}^*$. Comme

$$\emptyset = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bar{B}_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (X \setminus U_n) = X \setminus \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n \right), \quad (6.13)$$

on a que $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est un recouvrement ouvert de X . Donc, ils existent $n_1 < n_2 < \dots < n_k$ tels que

$$X = U_{n_1} \cup \dots \cup U_{n_k} \iff \emptyset = \bar{B}_{n_1} \cap \dots \cap \bar{B}_{n_k} = \bar{B}_{n_k} \supset \{x_{n_k}\}. \quad (6.14)$$

Ici on a utilisé le fait que $B_n \supset B_{n_k}$ pour $n < n_k$. On a donc trouvé un absurde.

Supposons maintenant que (X, d) soit compact et fixons un recouvrement ouvert $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ de X . Par le Lemme 6.14, on peut supposer $I \subset \mathbb{N}$. Si I est fini, $\{U_m\}_{m \in I}$ est un sous-recouvrement fini de \mathcal{U} et on a terminé. Supposons I infini. En ce cas, pour simplifier la notation on pose $I = \mathbb{N}$. On pose en suite, pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, $V_\ell = \bigcup_{m=0}^\ell U_m$ d'en sorte que $V_\ell \subset V_{\ell+1}$ et que

$$X = \bigcup_{\ell \in \mathbb{N}} V_\ell. \quad (6.15)$$

L'existence d'un sous-recouvrement fini de $\{U_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ est donc équivalente à l'existence de $\ell_0 \in \mathbb{N}$ tel que $V_{\ell_0} = X$. Supposons par l'absurde que $V_\ell \neq X$ pour tout $\ell \in \mathbb{N}$. En choisissant pour chaque $\ell \in \mathbb{N}$ un élément $x_\ell \in X \setminus V_\ell$ on construit donc une suite $(x_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}} \subset X$. Par compacité de X , elle admet une sous-suite convergente à un élément $x_\infty \in X$. Par (6.15), il existe donc V_{ℓ_0} tel que $x_\infty \in V_{\ell_0}$. Comme V_{ℓ_0} est ouvert, il

doit donc contenir une infinité des points de la suite $(x_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ ce qui est absurde par construction. Donc, on peut extraire un sous-recouvrement fini de $\{U_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ qui est donc un sous-recouvrement fini de \mathcal{U} . Cela termine la preuve. \square

Le résultat suivant est utilisé dans la preuve précédente. Nous en présentons la preuve pour complétude.

Lemma 6.14. *Soit (X, d) un espace métrique précompact. Alors, tout recouvrement ouvert admet un sous-recouvrement dénombrable.*

Démonstration. Comme X est précompact, pour chaque $\varepsilon = 1/n$, $n \in \mathbb{N}^*$, on trouve une famille finie $\mathcal{B}_n \subset 2^X$ de boules ouvertes de rayon $1/n$ qui couvre X . Soit $\mathcal{B} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathcal{B}_n$ la réunion des ces famille, qu'on vérifie aisément être dénombrable en étant la réunion dénombrable de partie finie. On note donc $\mathcal{B} = \{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Soit $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un recouvrement ouvert et fixons $U_i \in \mathcal{U}$. On observe que pour chaque $x \in U_i$ il existe une suite de boules $(B_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{B}$ telle que $x \in B_{n_k}$, $k \in \mathbb{N}$, et dont le rayon tends vers 0. Comme U_i est ouvert, $B_{n_k} \subset U_i$ pour k suffisamment grand. En particulier, il existe $n_x \in \mathbb{N}$ tel que $x \in B_{n_x} \subset U_i$. Donc, si on pose $N_i = \{n_x \mid x \in U_i\} \subset \mathbb{N}$ on a

$$U_i = \bigcup_{x \in U_i} B_{n_x} = \bigcup_{k \in N_i} B_k. \quad (6.16)$$

C.-à-d., U_i est exprimable comme réunion dénombrable de certains elements de \mathcal{B} .

Montrons maintenant que, grâce à cette observation, on peut extraire un recouvrement dénombrable de \mathcal{U} . En effet, on pose $M = \{k \in N_i \mid i \in I\} \subset \mathbb{N}$. On observe que pour chaque B_m , $m \in M$, il existe $i_m \in I$ tel que $U_{i_m} \supset B_m$, et on obtient

$$X = \bigcup_{i \in I} U_i = \bigcup_{i \in I} \bigcup_{k \in N_i} B_k = \bigcup_{m \in M} B_m \subset \bigcup_{m \in M} U_{i_m}. \quad (6.17)$$

Ceci montre que $\{U_{i_m}\}_{m \in M}$ est un sous-recouvrement dénombrable (car $M \subset \mathbb{N}$) de \mathcal{U} . \square

6.4 Compacité dans les evn

Dans cette section nous étudions le concept de compacité dans les espaces vectoriels normés. On commence par le résultat suivant.

Lemma 6.15 (Lemme de Riesz). *Soit (E, \mathbf{n}) un evn et soit F un sev de E . Si F n'est pas dense dans E , alors pour tout $\varepsilon \in (0, 1)$ il existe $x \in E$ tel que*

$$\mathbf{n}(x) = 1 \quad \text{et} \quad d(x, F) := \inf_{y \in F} \mathbf{n}(x - y) \geq 1 - \varepsilon. \quad (6.18)$$

Démonstration. Comme $\bar{F} \neq E$, il existe donc $v \in E$ tel que $d(v, F) > 0$ (voir exercice 6.4). De plus, on a

$$\frac{d(v, F)}{1 - \varepsilon} > d(v, F), \quad (6.19)$$

et donc, par les propriétés de l'infimum, il existe $y \in F$ tel que

$$\mathbf{n}(v - y) < \frac{d(v, F)}{1 - \varepsilon}. \quad (6.20)$$

On pose $x = \frac{v-y}{\mathfrak{n}(v-y)}$. On a immédiatement $\mathfrak{n}(x) = 1$. De plus, pour tout $z \in F$ on a

$$\mathfrak{n}(x-z) = \frac{1}{\mathfrak{n}(v-y)} \mathfrak{n}(v-y - \mathfrak{n}(v-y)z) > \frac{1-\varepsilon}{d(v,F)} \mathfrak{n}(v - \mathfrak{n}(v-y)y) \geq 1 - \varepsilon. \quad (6.21)$$

Ici on a utilisé (6.20) et le fait que $y + \mathfrak{n}(v-y)z \in F$. Le résultat suit en passant à l'infimum pour $z \in F$. \square

Théorème 6.16. *Soit (E, \mathfrak{n}) un evn. La boule unité fermé $\bar{B}(0,1)$ est compacte si et seulement si $\dim E < +\infty$. De même est vrai pour la sphere $\mathcal{S} = \{y \in E \mid \mathfrak{n}(y) = 1\}$.*

Démonstration. Comme $\bar{B}(0,1)$ et \mathcal{S} sont bornés et fermés, par le théorème de Heine-Borel elles sont compactes si $\dim E < +\infty$. Il nous reste donc à montrer que $\bar{B}(0,1)$ et \mathcal{S} ne sont pas compactes si $\dim E = +\infty$.

À cet effet, on montrera que si $\dim E = +\infty$ il existe une suite $(x_n)_n \in \mathcal{S} \subset \bar{B}(0,1)$ telle que $\mathfrak{n}(x_n - x_m) \geq 1/2$ pour tout $n \neq m$. On fixe donc $x_0 \in \mathcal{S}$, et on considère $F_0 = \text{vec}\{x_0\} \subset E$. On observe que F_0 est fermé et que $F_0 \neq E$, car

$$1 = \dim F_0 < \dim E = +\infty \implies F_0 \neq E. \quad (6.22)$$

Donc, par le Lemme de Riesz avec $\varepsilon = 1/2$, il existe $x_1 \in E \setminus F_0$ tel que $\mathfrak{n}(x_1) = 1$ et $d(x_1, F_0) \geq 1/2$. En particulier, $x_1 \in \mathcal{S}$ et $\mathfrak{n}(x_0 - x_1) \geq 1/2$. On procède maintenant par récurrence, en supposant d'avoir choisi $x_0, \dots, x_n \in \mathcal{S}$ tels que $\mathfrak{n}(x_k - x_m) \geq 1/2$ si $k \neq m$ et $k, m \leq n$. Mais alors, le même raisonnement que tout à l'heure avec $F_{n+1} = \text{vec}\{x_0, \dots, x_n\}$, nous garantis qu'il existe $x_{n+1} \in \bar{B}(0,1)$ tel que $\mathfrak{n}(x_k - x_{n+1}) \geq 1/2$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. En effet, on peut appliquer à nouveau le Lemme de Riesz car F_{n+1} est fermé et

$$n+1 = \dim F_{n+1} < \dim E = +\infty \implies F_{n+1} \neq E. \quad (6.23)$$

Ceci démontre l'existence de la suite souhaitée, et clôt la preuve. \square

Théorème 6.17. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Toute couples de normes sur E sont équivalentes entre eux.*

Démonstration. Car E est de dimension finie, on fixe une base $\{e_1, \dots, e_n\} \subset E$. Donc, tout $x \in E$ s'écris d'une façon unique comme

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i, \quad (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n. \quad (6.24)$$

On pose maintenant

$$\|x\| := \sum_{i=1}^n |x_i|. \quad (6.25)$$

On peut montrer que $\|\cdot\|$ est une norme avec une preuve analogue à celle utilisé pour $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$. Par propriété transitive de l'équivalence, il suffit de montrer qu'il existe une norme $\|\cdot\|$ telle que toute norme \mathfrak{n} est équivalente à $\|\cdot\|$.

On commence par démontrer que $\mathbf{n}(x) \leq C_1 \|x\|$ pour tout $x \in E$, où $C_1 = \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \mathbf{n}(e_i)$. En effet, par inégalité triangulaire et homogénéité on a

$$\mathbf{n}(x) = \mathbf{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i e_i \right) \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \mathbf{n}(e_i) \leq C_1 \|x\|, \quad \forall x \in E. \quad (6.26)$$

En particulier, ceci montre que $\text{Id} : (E, \|\cdot\|) \rightarrow (E, \mathbf{n})$ est une application continue (on le vérifie aisément à travers la caractérisation séquentielle, en effet si $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ l'inégalité qu'on vient de démontrer implique que $\mathbf{n}(x_n - x) \rightarrow 0$).

On passe maintenant à montrer qu'il existe $C_2 > 0$ tel que $\mathbf{n}(x) \geq C_2 \|x\|$ pour tout $x \in E$. D'abord, on observe qu'on peut poser

$$C_2 := \inf_{\substack{y \in E \\ \|y\|=1}} \mathbf{n}(y) \geq 0. \quad (6.27)$$

En effet, pour tout $x \in E$, $\mathbf{n}(x) = \|x\| \mathbf{n}(y)$ où $y = x/\|x\|$ est tel que $\|y\| = 1$. On doit donc montrer que $C_2 > 0$. Or, comme $\dim E < +\infty$, l'ensemble $\mathcal{S} = \{y \in E \mid \|y\| = 1\}$ est compact dans $(E, \|\cdot\|)$ en vertu du théorème 6.16. Comme on vient de montrer que $\text{Id} : (E, \|\cdot\|) \rightarrow (E, \mathbf{n})$ est continue, on a que \mathcal{S} est compacte dans (E, \mathbf{n}) . Finalement, le fait que la norme \mathbf{n} soit continue dans (E, \mathbf{n}) nous garantis qu'elle atteint un minimum sur chaque compacte, et donc qu'il existe $y_\star \in \mathcal{S}$ tel que $C_2 = \mathbf{n}(y_\star) \neq 0$. Ici on a utilisé que $0 \notin \mathcal{S}$. Ceci termine la preuve. \square

6.5 Exercices

Compacité séquentielle

Exercice 6.1. Soient

$$\begin{aligned} \ell^2 &= \left\{ x = (a_n)_n \subset \mathbb{R} \mid \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty \right\}, \\ \ell^\infty &= \left\{ x = (a_n)_n \subset \mathbb{R} \mid \sup_n |a_n| < \infty \right\}, \end{aligned} \quad (6.28)$$

munis des normes $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$, respectivement.

1. Montrer que $\ell^2 \subset \ell^\infty$.
2. Soit $S = \{x \in \ell^2 \mid \|x\|_2 = 1\}$. Trouver une suite $(x_n)_n \subset S$ telle que $x_n \rightarrow 0$ en ℓ^∞ .
3. En déduire que S n'est pas compacte.

Exercice 6.2. Étant donné l'intervalle $[0, 1]$ et un entier $n \in \mathbb{N}^*$, considérons l'ensemble \mathcal{F}_n des fonctions $f \in C^0([0, 1])$ qui sont affines (c.-à-d. avec dérivée constante) sur tous les intervalles de type $]i/n, (i+1)/n[$ pour $i = 0, \dots, n-1$ et tels que $\|f\|_\infty \leq 100$. Montrer que :

1. \mathcal{F}_n est une partie fermée et bornée de $(C([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$.
2. \mathcal{F}_n est une partie compacte de $(C([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$.

Continuité et compacité

Exercice 6.3. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn. Soit $f : E \rightarrow [0, +\infty)$ une fonction continue telle que,

$$\forall M > 0, \quad \exists R > 0 \quad \text{tel que} \quad \|x\| > R \implies |f(x)| > M. \quad (6.29)$$

Montrer que, si toute boule est compacte, alors f admet un minimum.

Exercice 6.4. Soit (X, d) un espace métrique et A une partie de X . Pour tout $x \in X$, on définit la *distance de A* comme

$$d(x, A) := \inf \{d(x, y) \mid y \in A\}. \quad (6.30)$$

Montrer que

1. $d(x, A) = 0$ si et seulement si $x \in \bar{A}$;
2. l'application $x \mapsto d(x, A)$ est lipschitzienne et donc continue.

De plus, déterminer s'il existe $y_0 \in A$ tels que $d(x, A) = d(x, y_0)$ dans les cas suivants :

1. A est compact ;
2. A est fermé et toute boules fermées $B(a, R) \subset X$, $a \in X$, $R > 0$ est compacte.

Donner une contre exemple lorsque A non fermé.

Exercice 6.5 (Théorème de point fixe pour espaces compacts). Soit A une partie compacte d'un espace métrique et $f : X \rightarrow X$ une fonction telle que

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y), \quad \forall x, y \in X, x \neq y. \quad (6.31)$$

Montrer que f admet un unique point fixe.

Est-ce que de même est vrai si l'on suppose A seulement fermé ?

Exercice 6.6. Soient $(E, \|\cdot\|)$ un evn, C une partie compacte de E et $f : C \rightarrow E$ t.q. $f(C) \subset C$. Montrer que :

1. si f est une isométrie (c.-à-d. $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$ pour tous $x, y \in C$) elle est bijective.
2. si $\|f(x) - f(y)\| \geq \|x - y\|$ pour tous $x, y \in C$, alors elle est une isométrie bijective.

Indication : considérer les images itérées d'un point.

Précompacité et propriété de Borel-Lebesgue

Exercice 6.7. Soit (X, d) un espace métrique compact et $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction localement borné (c'est-à-dire tel que pour tout $x \in X$ il existent $r_x > 0$ et $M_x > 0$ tels que $|f(y)| \leq M_x$ pour tout $y \in B(x, r_x)$). Montrer que f est bornée (c'est-à-dire qu'il existe $M > 0$ tel que $|f(x)| \leq M$ pour tout $x \in X$).

Exercice 6.8. Soit (X, d) un espace métrique. Montrer que pour tout parties compactes $A, B \subset X$ il existe un ouvert $U \subset X$ tel que $A \subset U$ et $B \cap \bar{U} = \emptyset$.

7 Espaces des fonctions : les théorèmes de Weierstrass et d'Ascoli

Dans cette section on va démontrer deux résultats très importants concernant l'espace métrique $(C([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$, et leurs applications.

7.1 Théorème de Weierstrass

Le premier résultat concerne le sous-espace des fonctions polynomiales :

$$\mathcal{P}([0, 1]) = \{P|_{[0,1]} \mid P \in \mathbb{R}[x]\} \subset C([0, 1]). \quad (7.1)$$

Théorème 7.1 (Théorème de Weierstrass). *L'ensemble des fonctions polynomiales $\mathcal{P}([0, 1])$ est dense dans $(C([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$.*

Ce théorème est une conséquence immédiate du résultat suivant.

Théorème 7.2 (Théorème de Bernstein). *Soit $f \in C([0, 1])$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose*

$$B_n(x) := \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}, \quad x \in [0, 1]. \quad (7.2)$$

Alors, $(B_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C([0, 1])$ converge vers f par rapport à $\|\cdot\|_\infty$.

Démonstration. La fonction f est continue sur $[0, 1]$ donc, d'après le théorème de Heine elle est uniformément continue. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe donc $\delta > 0$ tel que

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \forall x \text{ t.q. } \left|x - \frac{k}{n}\right| < \eta \implies \left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (7.3)$$

On rappelle le binôme de Newton :

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}. \quad (7.4)$$

En choisissant $a = x$ et $b = 1 - x$, ceci donne

$$1 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, \quad \forall x \in [0, 1]. \quad (7.5)$$

Donc, pour tout $x \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$|f(x) - B_n(x)| \leq \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| x^k (1-x)^{n-k} = S_1 + S_2, \quad (7.6)$$

où on a posé

$$S_1 = \sum_{\{k: |x-k/n| < \eta\}} \binom{n}{k} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| x^k (1-x)^{n-k}, \quad (7.7)$$

$$S_2 = \sum_{\{k: |x-k/n| \geq \eta\}} \binom{n}{k} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| x^k (1-x)^{n-k}. \quad (7.8)$$

On voit aisément, à l'aide de (7.3) et de (7.5) que

$$S_1 \leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \frac{\varepsilon}{2}. \quad (7.9)$$

À présent, en utilisant le fait que $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$, on obtient pour la seconde somme :

$$\begin{aligned} S_2 &\leq 2\|f\|_\infty \sum_{\{k: |x-k/n| \geq \eta\}} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &\leq \frac{2\|f\|_\infty}{\eta^2} \sum_{\{k: |x-k/n| \geq \eta\}} \binom{n}{k} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 x^k (1-x)^{n-k} \\ &\leq \frac{2\|f\|_\infty}{\eta^2} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 x^k (1-x)^{n-k}. \end{aligned} \quad (7.10)$$

En développant le carré ci-dessus et en réarrangeant les termes à l'aide par exemple du binôme de Newton (voir Lemma 7.3), on prouve que :

$$S_2 \leq \frac{2\|f\|_\infty}{\eta^2} \frac{x(1-x)}{n} \leq \frac{2\|f\|_\infty}{4n\eta^2} \quad (7.11)$$

Donc, si on choisit n suffisamment grand (par exemple $n \geq N_0 := \lceil \|f\|_\infty / (\eta^2 \varepsilon) \rceil + 1$) on a $S_2 \leq \varepsilon/2$. En utilisant aussi (7.9), il s'ensuit alors que

$$\exists N_0 \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall n \geq N_0, \forall x \in [0, 1], \quad \text{on a } |f(x) - B_n(x)| \leq \varepsilon. \quad (7.12)$$

Cela demontre donc que $\|f - B_n\|_\infty \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$. \square

Le résultat suivant a été utilisé dans la preuve du Théorème de Bernstein.

Lemma 7.3. *For all $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, it holds*

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 x^k (1-x)^{n-k} = \frac{x(1-x)}{n}, \quad \forall x \in [0, 1]. \quad (7.13)$$

Démonstration. Le cas $n = 1$ est obtenu par calcul direct. On suppose donc $n \geq 2$. Si on développe le carré dans la somme et on se rappelle (7.5), on a

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 x^k (1-x)^{n-k} = x^2 - 2x\Sigma_1 + \Sigma_2, \quad (7.14)$$

où on a posé

$$\Sigma_1 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{k}{n} x^k (1-x)^{n-k} \quad \text{et} \quad \Sigma_2 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{k^2}{n^2} x^k (1-x)^{n-k}. \quad (7.15)$$

En dérivant par rapport à $a \in \mathbb{R}$ à droite et à gauche dans le binôme de Newton (7.4), en réarrangeant les termes on obtient

$$a(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{k}{n} a^k b^{n-k}, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}. \quad (7.16)$$

En posant $a = x$ et $b = 1 - x$, ceci donne immédiatement que $\Sigma_1 = x$. On dérive encore (7.4) et on obtient (après avoir réarrangé les termes)

$$a^2(a+b)^{n-2} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{k(k-1)}{n(n-1)} a^k b^{n-k}, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}. \quad (7.17)$$

Si on pose à nouveau $a = x$ et $b = 1 - x$, et on développe les calculs à l'aide du fait que $\Sigma_1 = x$, ceci donne

$$\Sigma_2 = \frac{x}{n} + \frac{n(n-1)}{n^2} x^2. \quad (7.18)$$

Remplacer les valeurs qu'on a obtenu pour Σ_1 et Σ_2 dans (7.14) clôt la preuve. \square

Comme application du théorème de Weierstrass on montrera le théorème suivant (du à Hausdorff) sur le problème des moments, qui apparaisse souvent en probabilité.

Théorème 7.4. *Soient $f, g \in C([0, 1])$ tels que on a l'égalité des moments suivante*

$$\int_0^1 x^n f(x) dx = \int_0^1 x^n g(x) dx, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (7.19)$$

Alors, $f \equiv g$.

Démonstration. Par linéarité de l'intégrale, en posant $h = f - g \in C([0, 1])$ il suffit de démontrer que

$$\int_0^1 x^n h(x) dx = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N} \implies h \equiv 0. \quad (7.20)$$

Or, encore une fois par linéarité de l'intégrale, le membre de gauche implique que

$$\int_0^1 Q(x)h(x) dx = 0, \quad \forall Q \in \mathcal{P}([0, 1]). \quad (7.21)$$

Par le Théorème de Weierstrass, on peut fixer une suite des polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}([0, 1])$ telle que $P_n \rightarrow h$ par rapport à $\|\cdot\|_\infty$. Ceci implique que $P_n h \rightarrow h^2$, en effet

$$\|P_n h - h^2\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |h(x)| |P_n(x) - h(x)| \leq \|h\|_\infty \|P_n - h\|_\infty \rightarrow 0 \quad \text{pour } n \rightarrow +\infty. \quad (7.22)$$

Mais alors, par (7.21) on obtient

$$\int_0^1 h(x)^2 dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 P_n(x)h(x) dx = 0. \quad (7.23)$$

Comme h^2 est une fonction continue et positive, ceci donne $h^2 \equiv 0$ et donc $h \equiv 0$. \square

7.2 Théorème d'Ascoli

Définition 7.1. Une partie $\mathcal{F} \subset C([0, 1])$ est *uniformément équicontinue* si on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ t.q. } \forall f \in \mathcal{F} \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon \text{ si } |x - y| < \delta. \quad (7.24)$$

Elle est *uniformément bornée* s'il existe $M > 0$ tel que $\|f\|_\infty \leq M$ pour tout $f \in \mathcal{F}$.

On va démontrer le résultat suivant (à comparer avec l'Exercice 6.2).

Théorème 7.5 (Théorème d'Ascoli). *Une partie $\mathcal{F} \subset C([0, 1])$ uniformément bornée et uniformément équicontinue est précompacte. En particulier, toute suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ admet une sous-suite uniformément convergente dans $C([0, 1])$.*

Démonstration. La deuxième partie de l'énoncé est une conséquence immédiate du Corollaire 6.12. Il nous reste donc à montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existent f_1, \dots, f_κ , $\kappa \in \mathbb{N}$, telles que

$$\min_{j \in \llbracket 1, \kappa \rrbracket} \|f - f_j\|_\infty < \varepsilon \quad \forall f \in \mathcal{F}. \quad (7.25)$$

En effet, ceci montrera que \mathcal{F} est précompact.

Fixons $\varepsilon > 0$. Comme \mathcal{F} est uniformément borné, il existe $M > 0$ tel que $\|f\|_\infty \leq M$ pour toute $f \in \mathcal{F}$. Par uniforme équicontinuité, il existe δ tel que si $|x - y| < \delta$ alors $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ pour toute $f \in \mathcal{F}$.

Soient $K, N \in \mathbb{N}$ tels que $K > 2M/\varepsilon$ et $N > 1/\delta$, et considérons l'ensemble $\mathcal{A} \subset C([0, 1])$ des fonctions g affines par morceaux et telles que

$$\forall n \in \llbracket 0, N \rrbracket, \exists k = k(n) \in \llbracket -K, K \rrbracket \quad \text{t.q.} \quad g\left(\frac{n}{N}\right) = k \frac{M}{K}. \quad (7.26)$$

Comme $g \in \mathcal{A}$ est déterminé par le couples $\{(n, k(n)) \mid n \in \llbracket 0, N \rrbracket\}$ est évident que \mathcal{A} contient un nombre fini d'éléments. Donc, pour démontrer (7.25), il nous suffit de montrer que

$$\min_{g \in \mathcal{A}} \|f - g\|_\infty < 4\varepsilon \quad \forall f \in \mathcal{F}. \quad (7.27)$$

Fixons $f \in \mathcal{F}$ et considérons $g \in \mathcal{A}$ tel que

$$\left| f\left(\frac{n}{N}\right) - g\left(\frac{n}{N}\right) \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (7.28)$$

On observe qu'une telle g existe, car $|k\frac{M}{K} - k + 1\frac{M}{K}| = M/K < \varepsilon/2$ pour tout $k \in \llbracket -K, K \rrbracket$. De plus, par uniforme équi-continuité on a

$$\left| f\left(\frac{n}{N}\right) - f\left(\frac{n+1}{N}\right) \right| < \varepsilon \implies \left| g\left(\frac{n}{N}\right) - g\left(\frac{n+1}{N}\right) \right| < 2\varepsilon. \quad (7.29)$$

Comme g est affine entre n/N et $(n+1)/N$, ceci nous dit que

$$\left| g\left(\frac{n}{N}\right) - g(x) \right| < 2\varepsilon. \quad (7.30)$$

Finalement, pour tout $x \in [0, 1]$ si on pose $n_x = \lfloor Nx \rfloor$ on a

$$|f(x) - g(x)| \leq \left| f(x) - f\left(\frac{n_x}{N}\right) \right| + \left| f\left(\frac{n_x}{N}\right) - g\left(\frac{n_x}{N}\right) \right| + \left| g\left(\frac{n_x}{N}\right) - g(x) \right|. \quad (7.31)$$

Comme $|x - n_x/N| < 1/N < \delta$ on a que

$$\left| f(x) - f\left(\frac{n_x}{N}\right) \right| < \varepsilon. \quad (7.32)$$

Par uniforme équi-continuité et (7.30), on obtient $|f(x) - g(x)| < 4\varepsilon$, et donc (7.27). \square

Comme application du théorème d'Ascoli on présente une idée de démonstration du résultat suivant, qui montre que en affaiblissant les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz on peut toujours prouver l'existence (mais pas l'unicité) de solutions de (EDO).

Théorème 7.6 (Théorème de Peano). *Soit $G \subset \mathbb{R}^2$ fermé et borné et $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Étant donné $(x_0, t_0) \in G$, considérons l'équation différentielle suivante :*

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = f(x(t), t), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (\text{EDO})$$

Alors, il existe (au moins) une solution $t \mapsto x(t)$ à (EDO), définie dans un voisinage de t_0 .

Démonstration. Comme G est fermé et borné dans \mathbb{R}^2 il est aussi compact. Donc, par continuité, il existe $M > 0$ tel que $|f(x, t)| \leq M$ pour $(x, t) \in G$. Soit Δ l'ensemble fermé obtenu comme réunion des deux triangles de sommet (x_0, t_0) obtenus en traçant par (x_0, t_0) deux droites à coefficients angulaires M et $-M$ et ensuite deux droites verticales $t = a$ et $t = b$ choisis en sorte que $\Delta \subset G$.

Une ligne brisée $L \subset \Delta$, composé par la réunion des morceaux de droite $\ell_1, \dots, \ell_n \subset \Delta$, est dite d'Euler pour l'équation (EDO) si :

- $(x_0, t_0) \in L$;
- il existe $\ell_1 \cap \{x = a\} \neq \emptyset$ et $\ell_n \cap \{x = b\} \neq \emptyset$;
- le coefficient angulaire du morceaux de L qui passe par (x_0, t_0) est $f(x_0, t_0)$;
- $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ il existe $(x_k, t_k) \in \ell_k$ tel que $f(x_k, t_k)$ est le coefficient angulaire de ℓ_k .

Pour une ligne brisée d'Euler on note $|L| = \max_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket} \text{longueur}(\ell_k)$.

Soit $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de lignes brisées d'Euler tel que $|L_n| \rightarrow 0$ pour $n \rightarrow +\infty$ et désignons pas $\varphi_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction affine par morceaux ayant pour graphe la ligne L_n . On vérifie aisément que la suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C([a, b])$ est uniformément borné (car $\varphi_n(t) \in \Delta$ pour tout $t \in [a, b]$ et $n \in \mathbb{N}$) et uniformément équicontinue (car tout φ_n est lipschitzienne de la même constante $M > 0$). Donc, en vertu du théorème d'Ascoli (appliqué à $C([a, b])$) de la suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ on peut extraire un sous-suite, qu'on notera encore $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$, convergente par rapport à $\|\cdot\|_\infty$.

Posons $\varphi = \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n \in C([0, 1])$. Par construction,

$$\varphi(t_0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n(t_0) = x_0. \quad (7.33)$$

Il reste à vérifier si φ satisfait l'équation différentielle donnée sur $[a, b]$. C'est à dire, il faut montrer que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(t+h) - \varphi(t)}{h} = f(\varphi(t), t), \quad \forall t \in [a, b]. \quad (7.34)$$

Par continuité de f et le fait que $\varphi_n \rightarrow \varphi$, ceci revient à montrer que, pour tout $t \in [a, b]$,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N}, \delta > 0 \text{ t.q. } \left| \frac{\varphi_n(t+h) - \varphi_n(t)}{h} - f(x_n(t), t) \right| < \varepsilon \text{ si } |h| < \delta. \quad (7.35)$$

Ceci peut être montré en exploitant la définition de $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$, voir [3, §7.5]. \square

Remarque 7.1. Dans la preuve précédente, des sous-suites différentes des lignes brisées d'Euler peuvent converger vers des solutions différentes de l'équation (EDO). Ceci est le cas, par exemple, pour l'équation suivante (appelée parfois *brosse de Peano*) :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = 3x(t)^{3/2}, \\ x(0) = 0. \end{cases} \quad (7.36)$$

En effet, $x(t) = t^3$ et $x(t) = 0$ sont deux solutions distinctes, ainsi que, pour tout $a > 0$,

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a, \\ (t-a)^3 & \text{si } t \geq a. \end{cases} \quad (7.37)$$

7.3 Exercices

Théorème de Weierstrass

Exercice 7.1. Considérons l'espace des polynômes $\mathbb{R}[x]$, avec la norme

$$\mathbf{n}(P) = \int_0^1 |P(x)| dx. \quad (7.38)$$

Montrer que \mathbf{n} est bien une norme et que $(\mathbb{R}[x], \mathbf{n})$ n'est pas complet.

Théorème d'Ascoli

Exercice 7.2. On considère la suite de fonctions $f_n(t) = \sin(\sqrt{t + 4(n\pi)^2})$, $t \in [0, +\infty)$.

1. Montrer que pour tout $t > 0$ on a $f_n(t) \rightarrow 0$ pour $n \rightarrow +\infty$;
2. Montrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est équicontinue.
3. Est-ce que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $(C([0, +\infty)), \|\cdot\|_\infty)$? Et dans $(C([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$?

Exercice 7.3. On se propose de donner une preuve alternative du Théorème de Peano, à travers l'argument suivant :

1. Montrer que si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fonctions sur $C^1(G)$ convergente vers f par rapport à la norme $\|\cdot\|_\infty$, alors les solutions $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ données par Cauchy-Lipschitz forment une famille équicontinue sur un intervalle commun ;
2. En déduire le théorème de Peano.

Exercice 7.4. Considérons $\text{Lip}([0, 1])$, l'espace des fonctions lipschitziennes de $[0, 1]$ à valeurs dans \mathbb{R} , avec la norme

$$\mathbf{n}(f) = \|f\|_\infty + \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}. \quad (7.39)$$

1. Montrer que \mathbf{n} est une norme ;
2. Montrer que de toute suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{B}$ on peut extraire une sous-suite $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \subset (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge à $f \in \text{Lip}([0, 1])$ par rapport à $\|\cdot\|_\infty$ et telle que

$$\mathbf{n}(f) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{n}(f_n). \quad (7.40)$$

3. En déduire que la boule unité fermé \mathcal{B} de $\text{Lip}([0, 1])$ est compacte dans l'espace $(C([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$.
4. Pourquoi ceci ne contredit pas le théorème 6.16 ?

Exercice 7.5. On appelle *arc rectifiable* un sous-ensemble $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ tel qu'il existe une application lipschitzienne $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ pour laquelle $\Gamma = \gamma([0, 1])$. On définit la longueur de Γ comme

$$\ell(\Gamma) = \inf\{L_\eta \mid \eta \in \text{Lip}([0, 1], \mathbb{R}^n) \text{ t.q. } \eta([0, 1]) = \Gamma\}, \quad \text{où} \quad L_\eta = \sum_{t \neq s} \frac{\|\eta(t) - \eta(s)\|_2}{|t - s|}.$$

Montrer qu'il existe $\gamma_* \in \text{Lip}([0, 1], \mathbb{R}^n)$, $\gamma_*([0, 1]) = \Gamma$, telle que $L_{\gamma_*} = \ell(\Gamma)$.

8 Connexité

8.1 Connexité par arcs

Définition 8.1. Soit (X, d) un espace métrique. Un *chemin* dans X est une application continue $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$. On dira que le chemin γ “joint” les $\gamma(0)$ à $\gamma(1)$.

Par exemple, dans (\mathbb{R}^2, d_s) la fonction $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ est un chemin qui joint $(1, 0)$ à $(-1, 0)$.

Définition 8.2. Soit (X, d) un espace métrique. On dit que $A \subset X$ est *connexe par arcs* si toute couple de points de A est reliée par un chemin qui reste dans A , c’est-à-dire, tel que $\gamma(t) \in A$ pour tout $t \in [0, 1]$.

Dans les evn, une classe particulier d’ensembles connexe par arcs est celle des ensembles convexes.

Définition 8.3. Soit (E, \mathfrak{n}) un evn et $A \subset E$. On dit que A est *convexe* si

$$\forall x, y \in A, \quad \forall t \in [0, 1], \quad ty + (1 - t)x \in A. \quad (8.1)$$

Proposition 8.1. *Tout ensemble convexe dans un evn est connexe par arcs.*

Démonstration. Soit $x, y \in A$. La fonction $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ définie par $\gamma(t) = ty + (1 - t)x$ est bien un chemin reliant x à y . De plus, par convexité $\gamma(t) \in A$ pour tout $t \in [0, 1]$, et donc A est connexe par arcs. \square

On aura besoin aussi du résultat suivant.

Proposition 8.2. *Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques. Soit $F : X \rightarrow Y$ une application continue, et soit $A \subset X$ une partie connexe par arcs. Alors, $f(A)$ est connexe par arcs dans Y .*

Démonstration. Soit $y_1, y_2 \in f(A)$. Alors il existe $x_1, x_2 \in A$ tels que $f(x_1) = y_1$ et $f(x_2) = y_2$. En vertu de la connexité par arcs de A il existe donc un chemin $\gamma : [0, 1] \rightarrow A$ qui relie x_1 et x_2 . Posons alors $\psi = f \circ \gamma$. On a que $\psi : [0, 1] \rightarrow f(A)$, que $\psi(0) = f(x_1) = y_1$ et que $\psi(1) = y_2$. Comme ψ est continue étant la composition de fonctions continues, on a donc trouvé un chemin qui relie y_1 à y_2 . \square

Finalement on caractérise les connexes par arcs dans (\mathbb{R}, d_s) .

Proposition 8.3. *La partie $A \subset \mathbb{R}$ est connexe par arcs dans (\mathbb{R}, d_s) si et seulement si elle est une intervalle.*

Démonstration. C'est triviale de remarquer que A est un intervalle si et seulement si elle est convexe. Ceci implique que toute intervalle est connexe par arcs. Pour démontrer la réciproque, on montrera que toute parties A connexe par arcs est convexe. Soit $x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq y$. Il existe donc $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ un chemin joignant x à y dans A . Or, par continuité, $\gamma([0, 1]) = [m, M]$, où $m < M$. On a donc $[m, M] \subset A$ et, car $x, y \in [m, M]$, aussi que $[x, y] \subset [m, M] \subset A$. On en déduit que nécessairement A est un intervalle de \mathbb{R} . \square

8.2 Connexité

Dans cette partie, nous étendons la notion de connexité par arcs, introduite dans le paragraphe précédent.

Définition 8.4. Un espace métrique (X, d) est *connexe* s'il n'existe pas deux ouverts $U_1, U_2 \subset X$, $U_1, U_2 \neq \emptyset$, tels que $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ et $U_1 \cup U_2 = X$.

Une partie $A \subset X$ est connexe si $(A, d|_A)$ est connexe.

On peut simplifier la définition ci-dessus avec la notion suivante.

Définition 8.5. Soit (X, d) un espace métrique et $A \subset X$. Une partie $B \subset A$ est dite être un *ouvert relatif de A* si elle est ouverte dans $(A, d|_A)$. Autrement dit, s'il existe un ouvert $U \subset X$ tel que $B = U \cap A$. Il en est de même pour les fermés.

On a donc la proposition suivante. On rappelle qu'on a déjà observé que X et \emptyset sont à la fois ouverts et fermés. C'est donc immédiat de se convaincre que A et \emptyset sont à la fois ouverts et fermés relatifs de $A \subset X$.

Proposition 8.4. Soit (X, d) un espace métrique. Alors, $A \subset X$ est connexe si et seulement si l'une ou l'autre des propositions suivantes est vérifiée :

- i.* Il n'existe pas une partition de A en deux ouverts relatifs ;
- ii.* Il n'existe pas une partition de A en deux fermés relatifs ;
- iii.* Les seuls ensembles à la fois ouverts et fermés relatifs de A sont A lui-même et l'ensemble vide.

Démonstration. Observons que A n'est pas connexe si et seulement s'il existent deux ouverts tels que $U_1, U_2 \subset X$, $U_1 \cap A, U_2 \cap A \neq \emptyset$, et $A \cap (U_1 \cup U_2) = A$. Comme $U_1 \cap A$ et $U_2 \cap A$ sont des ouverts relatifs de A , ceci montre l'équivalence de la connexité et de la première proposition.

Supposons maintenant que A ne respect pas *i.* et soit $\{A_1, A_2\}$ la partition de A en deux ouverts relatifs. Alors, $A_1 = U_1 \cap A$ pour un ouvert $U_1 \subset X$, et donc $F_1 = A \setminus A_1 = (X \setminus U_1) \cap A$ est un fermé relatif. De même étant vrai pour $F_2 = A \setminus A_2$, montrons que $\{F_1, F_2\}$ est une partition de A . Ceci est immédiat, car $A = A_1 \cup A_2$ et donc $F_1 = A_2$ et $F_2 = A_1$. On a donc montré que *ii.* implique *i.*. Le même argument peut être utilisé pour montrer que *i.* implique *ii.*.

Pour compléter la preuve, on observe que l'argument ci-dessus montre que *i.* implique que tout éléments de la partition en ouverts relatifs sont à la fois ouverts et fermés. \square

Remarque 8.1. Intuitivement, on peut interpréter les connexes de la façon suivante : un ensemble est connexe s'il est en seul "morceau". Par exemple, \mathbb{R}^* n'est pas connexe (il est en deux morceaux : \mathbb{R}_+^* et \mathbb{R}_-^*).

La propriété suivante est l'analogie de la Proposition 8.2

Proposition 8.5. Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques. Soit $F : X \rightarrow Y$ une application continue, et soit $A \subset X$ une partie connexe. Alors, $f(A)$ est connexe dans Y .

Démonstration. Supposons que $f(A)$ ne soit pas connexe. Donc, ils existent $V_1, V_2 \subset Y$ tels que $V_1 \cap A, V_2 \cap A \neq \emptyset$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ et $V_1 \cup V_2 \supset f(A)$. Par continuité, on a donc que $U_1 = f^{-1}(V_1)$ et $U_2 = f^{-1}(V_2)$ sont ouverts à intersection non-vidée avec A . C'est immédiat de vérifier que $U_1 \cap U_2 = f^{-1}(V_1 \cap V_2) = \emptyset$ et que $U_1 \cup U_2 = f^{-1}(V_1 \cup V_2) \supset A$. Donc, A n'est pas connexe. \square

8.2.1 Connexité et connexité par arcs

La propriété qui suit va nous permettre de faire le lien entre les ensembles connexes et connexes par arcs.

Proposition 8.6. Soit (X, d) un espace métrique et $A \subset X$ une de ses parties. Si A est connexe par arcs, alors il est connexe.

Démonstration. Sans perte de généralité on va supposer $A = X$. Raisonnons par l'absurde et supposons X connexe par arcs mais non connexe. Ils existent donc $U_1, U_2 \subset X$ tels que $U_1, U_2 \neq \emptyset$, $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ et $U_1 \cup U_2 \supset X$. L'idée est d'utiliser la Proposition 8.2. Soit donc $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction caractéristique de U_1 , c'est à dire,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in U_1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (8.2)$$

Montrons que f est continue, par caractérisation topologique. Si $V \subset \mathbb{R}$ est un ouvert on a les cas suivants

$$f^{-1}(V) = \begin{cases} X & \text{si } 0, 1 \in V, \\ U_1 & \text{si } 1 \in V, 0 \notin V, \\ U_2 & \text{si } 0 \in V, 1 \in V, \\ \emptyset & \text{si } 0, 1 \notin V. \end{cases} \quad (8.3)$$

Donc, par définition de U_1 et U_2 , la préimage de tout ouverts de \mathbb{R} est ouverte, et donc f est continue. Or, par la Proposition 8.2 et le fait que X est connexe par arcs, on a que $f(X) \subset \mathbb{R}$ est connexe par arcs. Autrement dit, par la Proposition 8.3 $f(X)$ est un intervalle. Ceci contredit le fait que, par définition, $f(X) = \{0, 1\}$. La propriété est donc démontrée. \square

On présente une démonstration alternative, basé sur le fait (montré dans l'Exercice 8.7) que si on a des parties connexes $C_i \subset X$ telles que $\bigcap_i C_i \neq \emptyset$ alors $\bigcup_i C_i$ est connexe.

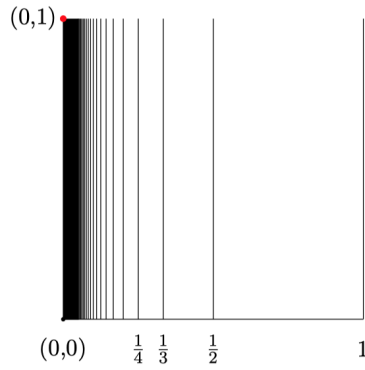


FIGURE 8.1 – La peigne du topologue [2].

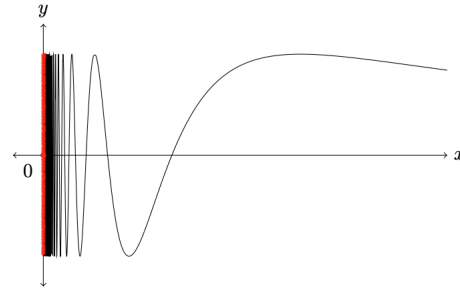


FIGURE 8.2 – La courbe du topologue [2].

Démonstration alternative. On se réduit toujours au cas $A = X$, et on fixe $x \in X$. Comme X est connexe par arcs, pour tout $y \in X$ il existe un chemin $\gamma_x : [0, 1] \rightarrow X$ qui relie x et y . Donc on peut couvrir X avec les images de ces chemins :

$$X = \bigcup_{y \in X} \gamma_x([0, 1]). \quad (8.4)$$

Observons que $\gamma_x([0, 1])$ est connexe par la Proposition 8.5, car γ_x est continue et $[0, 1]$ est connexe par l'Exercice 8.9. De plus,

$$\bigcap \gamma_x([0, 1]) = \{x\} \neq \emptyset. \quad (8.5)$$

Donc, X est connexe. □

Même si c'est surprenant, le résultat précédent n'admet pas de converse en générale. En effet, on montre dans les exemples qui suivent qu'ils existent des ensembles connexes qui ne sont pas connexe par arcs. L'exposition et les figures de cette partie sont prises de [2].

Exemple 8.1 (La peigne du topologue). On considère le sous-ensemble C de (\mathbb{R}^2, d_s) défini par (voir Figure 8.1)

$$C = ([0, 1] \times \{0\}) \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left(\left\{ \frac{1}{n} \right\} \times [0, 1] \right) \cup \{(0, 1)\}. \quad (8.6)$$

On commence par montrer que D est connexe. L'ensemble $D_0 = D \setminus \{(0, 1)\}$ est évidemment connexe par arcs. En effet, tout points $(x, y), (x', y') \in D_0$ peuvent être relié par la droite brisée qui connecte les points $(x, y), (x, 0), (x', 0)$ et (x', y') . Un raisonnement similaire montre que aussi l'adhérence \bar{D}_0 est connexe par arcs (on observe que \bar{D}_0 est la réunion de D_0 avec $\{0\} \times [0, 1]$). Donc, D_0 et \bar{D}_0 sont connexes. Comme $D_0 \subset D \subset \bar{D}_0$, ceci montre que D est connexe.

Montrons à présent que D n'est pas connexe par arcs. À cet effet, on montrera qu'il n'existe pas des chemins qui relient $p_0 = (0, 1)$ aux autres points de D . Ceci revient à montrer que si $\gamma : [0, 1] \rightarrow D$ est une fonction continue telle que $\gamma(0) = p_0$, alors $\gamma(t) = p_0$ pour tout $t \in [0, 1]$. Posons donc

$$B = \{t \in [0, 1] \mid \gamma(t) = p_0\}. \quad (8.7)$$

Comme $0 \in B$, ceci est un sous-ensemble non-vide de $[0, 1]$. On montrera que $B = [0, 1]$ en montrant que B est ouvert est fermé relatif de $[0, 1]$, qui est connexe.

Le fait que B soit fermé est une conséquence immédiate de la continuité de γ , car $B = \gamma^{-1}(p_0)$. Pour montrer que B est ouvert, fixons $t_0 \in B$. Par continuité de γ , there exists $\delta > 0$ tel que si $|t - t_0| < \delta$, alors $\|\gamma(t) - p_0\| < 1/2$ (ici on a utilisé que $\gamma(t_0) = p_0$ car $t_0 \in B$). Comme $\|(x, 0) - p_0\| \geq 1$ pour tout $x \in [0, 1]$, si $|t - t_0| < \delta$ le point $\gamma(t)$ doit être dans un des morceaux verticaux de D .

Soit maintenant $\pi_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $\pi_1(x, y) = x$, qui est continue, et posons $I = (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \cap [0, 1]$, qui est connexe. Par les considérations précédentes, on a que $\pi_1 \circ \gamma(t) \in \{0\} \cup \{1/n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ si $t \in I$. Donc, car $\pi_1 \circ \gamma$ est continue, on a que $\pi_1 \circ \gamma(I)$ est un sous-ensemble connexe de $\{0\} \cup \{1/n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ qui contient $\pi_1 \circ \gamma(t_0) = 0$. Par l'Exercice 8.5, ceci implique que $\pi_1 \circ \gamma(I) = \{0\}$. Ceci étant équivalent au fait que $\gamma(t) = p_0$ pour tout $t \in I$, on a donc montré que $I \subset B$, qui est donc ouvert. Ceci conclu la preuve.

Dans cette exemple $\bar{D} = \bar{D}_0$ est connexe par arcs. On montre maintenant un exemple d'un ensemble fermé et connexe, mais non connexe par arcs.

Exemple 8.2 (Courbe du topologue). On pose (voir Figure 8.2)

$$G_0 = \left\{ \left(x, \sin \frac{1}{x} \right) \mid x \in (0, 1] \right\}, \quad G = \overline{G_0} = (\{0\} \times [-1, 1]) \cup G_0. \quad (8.8)$$

Par l'Exercice 8.1, on sait que G_0 est connexe par arcs, et donc connexe. Par l'Exercice 8.8, G est donc connexe.

Montrons que G n'est pas connexe par arcs, en montrant qu'il n'existe pas des chemins continus qui relient le point $p_0 = (0, 0)$ à un point $p_1 = (x_1, \sin \frac{1}{x_1})$ avec $x_1 > 0$. On raisonne par l'absurde, et on suppose qu'il existe un chemin $\gamma : [0, 1] \rightarrow G$, continu et telle que $\gamma(0) = p_0$ et $\gamma(1) = p_1$. Soit maintenant $\pi_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $\pi_1(x, y) = x$, qui est continue, et posons

$$t_0 = \inf \{t > 0 \mid \pi_1 \circ \gamma(t) > 0\}. \quad (8.9)$$

On a donc $\pi_1 \circ \gamma(t) = 0$ si $t < t_0$. Par continuité de $\pi_1 \circ \gamma$, on a que $\pi_1 \circ \gamma(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0^-} \pi_1 \circ \gamma(t) = 0$ (on a pas forcément, par contre, $\gamma(t_0) = p_0$). Par continuité de γ , on peut donc choisir $\delta > 0$ tel que (voir Figure 8.3)

$$t \in [t_0, t_0 + \delta) \implies \|\gamma(t) - \gamma(t_0)\|_2 < \frac{1}{2}. \quad (8.10)$$

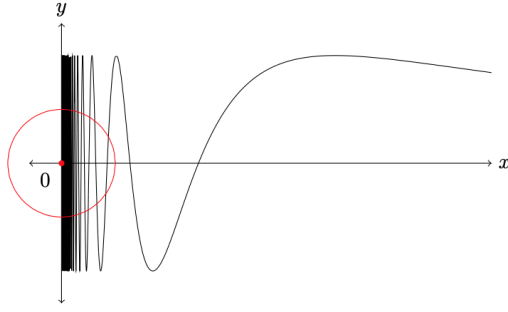


FIGURE 8.3 – Représentation graphique du voisinage donné par (8.10) dans le cas où $\gamma(t_0) = (0, 0)$. Figure tirée de [2].

Car t_0 est un infimum, pour le même $\delta > 0$ on trouve $t_1 \in [t_0, t_0 + \delta)$ tel que $a := \pi_1 \circ \gamma(t_1) > 0$. Or, l'image $\pi_1 \circ \gamma([t_0, t_1]) \subset \mathbb{R}$ est connexe et contient $0 = \pi_1 \circ \gamma(t_0)$ et $a = \pi_1 \circ \gamma(t_1)$. Car les connexes de \mathbb{R} sont les intervalles, on a donc

$$[0, a] \subset \pi_1 \circ \gamma([t_0, t_1]). \quad (8.11)$$

Ceci et (8.10) contredisent la continuité de $\pi_1 \circ \gamma$. En effet, $\sin 1/t$ est en train de sortir et rentrer du cercle rouge en Figure 8.3, donné par (8.10), et donc l'image des coordonnées x de γ sur $[t_0, t_1]$ ne peut pas être un intervalle tout entier. Dans la suite on va formaliser cette idée.

On rappelle que $\sin \theta = 1$ si et seulement si $\theta = (4k+1)\pi/2$ et $\sin \theta = -1$ si et seulement si $\theta = (4k-1)\pi/2$, pour $k \in \mathbb{Z}$. Donc, si on pose $\xi_k = \frac{2}{(4k+1)\pi}$ et $\eta_k = \frac{2}{(4k-1)\pi}$ pour $k \in \mathbb{N}$, on a que

$$\left(\xi_k, \sin \frac{1}{\xi_k} \right) = (\xi_k, 1) \quad \text{et} \quad \left(\eta_k, \sin \frac{1}{\eta_k} \right) = (\eta_k, -1). \quad (8.12)$$

Comme $\lim_k \xi_k = \lim_k \eta_k = 0$, ceci prouve qu'il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que $\xi_k, \eta_k \in [0, a]$ pour $k > K$. En particulier, par (8.11), ils existent $s_1, s_2 \in [t_0, t_1]$ tels que $\gamma(s_1) = (x_1, 1)$ et $\gamma(s_2) = (x_2, -1)$ pour $x_1, x_2 > 0$. En particulier, $\|\gamma(s_1) - \gamma(s_2)\|_2 \geq \sqrt{1^2 - (-1)^2} = \sqrt{2} > 1$. Ceci donne une contradiction, car par (8.10) on a

$$\|\gamma(s_1) - \gamma(s_2)\|_2 \leq \|\gamma(s_1) - \gamma(t_0)\|_2 + \|\gamma(t_0) - \gamma(s_2)\|_2 < 1. \quad (8.13)$$

Donc, γ ne peut pas être continue, et G n'est pas connexe par arcs.

On termine notre discours sur la connexité avec ce converse partiel de la Proposition 8.6.

Théorème 8.7. *Soit (E, \mathfrak{n}) un evn et soit $A \subset E$ une partie ouverte. Alors, A est connexe si et seulement si il est connexe par arcs.*

Démonstration. Par la Proposition 8.6 il nous suffit de démontrer que si $A \subset E$ est ouvert et connexe alors il est connexe par arcs. À cet effet, on fixe $x \in A$ et on pose

$$U = \{y \in A \mid \text{existe un chemin (continu) dans } A \text{ qui relie } x \text{ à } y\}. \quad (8.14)$$

En vertu de l'exercice 8.2, il faut donc montrer que $U = A$. À cet effet, on montrera que U et $V = A \setminus U$ sont ouverts, ce qui nous donnera une partition de A en deux ouverts à intersection vide. Comme $x \in U$, on a que $U \neq \emptyset$, et donc la connexité de A impliquera que $V = \emptyset$ ou (d'une façon équivalente) que $U = A$.

Montrons que U est ouvert. Comme $U \subset A$, pour tout $y \in U$ il existe $r > 0$ tel que $B(y, r) \subset A$. Par l'exercice 8.3 $B(y, r)$ est connexe par arcs. Donc, tout $z \in B(y, r)$ est relié à y par un chemin continu. Comme $y \in U$, il existe un chemin continu reliant x à y et donc, par l'exercice 8.2, il existe aussi un chemin continu reliant x à z . Ceci montre que $B(y, r) \subset U$ et donc que U est ouvert.

Montrons maintenant que $V = A \setminus U$ est ouvert. Soit $y \in V$, c'est-à-dire, supposons qu'il n'existe pas de chemins continus reliant x à y . Comme $V \subset A$, il existe $r > 0$ tel que $B(y, r) \subset A$. Supposons, par l'absurde, que $B(y, r) \not\subset V$. Ceci est équivalent à l'existence de $z \in B(y, r) \cap U$. Mais alors, il existe un chemin qui relie x à z et, comme $B(y, r)$ est connexe par arcs, il existe aussi un chemin qui relie z à y . Ceci donne un chemin qui relie x à y , et donc montre que $y \in U$, ce qui contredit l'hypothèse $y \in V$. Donc V est ouvert. \square

Remarque 8.2. Le théorème précédent reste vrai si on remplace l'evn (E, \mathbf{n}) par un espace métrique (X, d) qui soit *localement connexe par arcs*, c'est-à-dire tel que

$$\forall x \in X \quad \exists R > 0 \text{ tel que } B(x, r) \text{ est connexe par arcs pour tout } r < R. \quad (8.15)$$

8.3 Exercices

Connexité par arcs

Exercice 8.1. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue (par rapport à d_s). Montrer que le graphe

$$G = \{(t, f(t)) \mid t \in [0, 1]\} \subset \mathbb{R}^2, \quad (8.16)$$

est connexe par arcs.

Exercice 8.2. Soit (X, d) un espace métrique et $x, y, z \in X$. Soient $\gamma_y : [0, 1] \rightarrow X$ et $\gamma_z : [0, 1] \rightarrow X$ deux chemins continus tels que $\gamma_y(0) = \gamma_z(0) = x$, $\gamma_y(1) = y$ et $\gamma_z(1) = z$. Montrer alors qu'il existe un chemin continu $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ tel que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = z$.

Exercice 8.3. Montrer que dans un evn tout boule est convexe et donc connexe par arcs. Donner un exemple d'espace métrique où aucune boule de rayon positif est connexe.

Exercice 8.4. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. On souhaite démontrer à l'aide de la connexité par arcs le résultat classique suivant : si f est continue et injective, alors f est strictement monotone. Pour cela, on pose

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > y\} \quad \text{et} \quad F(x, y) = f(x) - f(y). \quad (8.17)$$

1. Démontrer que $F(C)$ est un intervalle ;
2. Conclure.

Connexité

Exercice 8.5. On dit qu'un espace métrique est *totalelement discontinu* si seulement l'ensemble vide et les singletons sont connexes. Montrer que :

1. (X, d_{discr}) est totalelement discontinu ;
2. $\{0\} \cup \{1/n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$, comme partie de (\mathbb{R}, d_s) , est totalelement discontinu.
3. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ est totalelement discontinu ;
4. l'espace de Baire est totalelement discontinu.

Exercice 8.6. Soit (X, d) un espace métrique et (Y, d_{discr}) un espace métrique discret. Montrer que X est connexe si et seulement si toute fonction continue $f : X \rightarrow Y$ est constante.

Exercice 8.7. Soit (X, d) un espace métrique. Soit $\mathcal{C} = \{C_i\}_{i \in I}$ une famille de parties de X , indexé par un ensemble quelconque I , telle que $C_i \subset X$ est connexe pour tout $i \in I$ et

$$\bigcap_{i \in I} C_i \neq \emptyset. \quad (8.18)$$

Montrer que alors $\bigcup_{i \in I} C_i$ est connexe.

Exercice 8.8. Soit (X, d) un espace métrique. Montrer que si $A \subset X$ est connexe, alors \bar{A} est connexe et de même est vrai pour tout B tels que $A \subset B \subset \bar{A}$.

Exercice 8.9. Montrer que les parties connexes de (\mathbb{R}, d_s) sont exactement les intervalles.

Exercice 8.10. Montrer que (\mathbb{R}, d_s) et (\mathbb{R}^2, d_s) ne sont pas homéomorphes.

Exercice 8.11. Soit (X, d) un espace métrique et $x, y \in X$. On dit qu'il existe une ε -chaîne reliant x à y si il existe $x = x_1, x_2, \dots, x_n = y$ un nombre fini de points de X tels que $d(x_i, x_{i+1}) < \varepsilon$ pour tout $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. On dit que X est bien enchaîné si, pour tout $\varepsilon > 0$ et tous $x, y \in X$, il existe une ε -chaîne reliant x à y . Pour $x \in X$ et $\varepsilon > 0$, on pose $A(x, \varepsilon) = \{y \in X \mid \text{il existe une } \varepsilon\text{-chaîne reliant } x \text{ à } y\}$.

1. Démontrer que A est ouvert et fermé.
2. En déduire que si X est connexe, alors X est bien enchaîné.
3. La réciproque est-elle vraie ?
4. On suppose que X est compact et bien enchaîné. Démontrer que X est connexe.

9 Applications linéaires et continuité

Dans cette partie, nous étudions l'espace des fonctions linéaires et continue entre deux evn (E, \mathbf{n}_E) et (F, \mathbf{n}_F) . En particulier, on le caractérisera et on montrera que lui-même est un evn .

Définition 9.1. Soient E et F deux espaces vectoriels. Une application $f : E \rightarrow F$ est *linéaire* si :

- i. Pour tout $x, y \in E$ on a $f(x + y) = f(x) + f(y)$;
- ii. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in E$ on a $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

L'ensemble des applications linéaires de E dans F est dénoté $\mathcal{L}(E, F)$. Lorsque E et F sont des evn , on notera $L(E, F) \subset \mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des fonctions linéaires et continue de E dans F .

Théorème 9.1. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors, les propositions suivantes sont équivalentes :

- i. $f \in L(E, F)$;
- ii. f est continue en 0_E ;
- iii. f est bornée sur $B_E(0_E, 1)$;
- iv. f est bornée sur $\mathcal{S} = \{x \in E \mid \mathbf{n}_E(x) = 1\}$;
- v. Il existe $k > 0$ tel que $\mathbf{n}_F(f(x)) \leq k\mathbf{n}_E(x)$ pour tout $x \in E$;
- vi. f est lipschitzienne.

Démonstration. On démontrera les propriétés dans l'ordre.

i. \implies ii. Par définition, car f est continue si elle est continue en tout points.

ii. \implies iii. Par continuité en 0, en choisissant $\varepsilon = 1$ dans la définition, on obtient

$$\exists \delta > 0 \text{ t.q. } \mathbf{n}_F(f(x)) \leq 1 \text{ si } \mathbf{n}_E(x) \leq \delta. \quad (9.1)$$

Ici, on a utilisé le fait que si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $f(0_E) = 0_F$. Soit à présent $y \in B_E(0_E, 1)$, c.-à-d. $\mathbf{n}_E(y) \leq 1$, et posons $x = \delta y$. Donc, $\mathbf{n}_E(x) = \delta \mathbf{n}_E(y) \leq \delta$. En vertu de (9.1), comme $y = x/\delta$ on en déduit que

$$\mathbf{n}_F(f(y)) = \mathbf{n}_F\left(\frac{f(x)}{\delta}\right) = \frac{\mathbf{n}_F(f(x))}{\delta} \leq \frac{1}{\delta} \quad \forall y \in B_E(0_E, 1). \quad (9.2)$$

iii. \implies iv. Immédiat, car $\mathcal{S} \subset B_E(0_E, 1)$.

iv. \implies v. L'énoncé est vrai pour tout $k > 0$ si $x = 0_E$, donc on suppose $x \neq 0_E$. Par hypothèse, il existe $k > 0$ tel que $\mathbf{n}_F(f(y)) \leq k$ si $\mathbf{n}_E(y) = 1$. On pose $y = x/\mathbf{n}_E(x)$, en sorte que $\mathbf{n}_E(y) = 1$, et on obtient

$$\mathbf{n}_F(f(x)) = \mathbf{n}_F\left(\frac{f(x)}{\mathbf{n}_E(x)}\mathbf{n}_E(x)\right) = \mathbf{n}_F(y)\mathbf{n}_E(x) \leq k\mathbf{n}_E(x), \quad \forall x \in E \neq \{0_E\}. \quad (9.3)$$

v. \implies vi. Il suffit d'observer que pour tout $x, y \in E$ on a

$$\mathbf{n}_F(f(x) - f(y)) = \mathbf{n}_F(f(x - y)) \leq \mathbf{n}_E(x - y). \quad \square$$

Le théorème précédent nous permet d'introduire une définition de norme d'une application linéaire continue. À cet effet, on prouve le résultat suivant.

Proposition 9.2. *Soit $f \in L(E, F)$, une fonction linéaire et continue. Posons*

$$\begin{aligned} \mathfrak{N}_1 &= \sup_{x \in E \setminus \{0_E\}} \frac{\mathbf{n}_F(f(x))}{\mathbf{n}_E(x)}, & \mathfrak{N}_2 &= \sup_{\mathbf{n}_E(x)=1} \mathbf{n}_F(f(x)), & \mathfrak{N}_3 &= \sup_{x \in B_E(0_E, 1)} \mathbf{n}_F(f(x)), \\ \mathfrak{N}_4 &= \inf \{k > 0 \mid \mathbf{n}_F(f(x)) \leq k\mathbf{n}_E(x) \quad \forall x \in E\}. \end{aligned}$$

Alors, $\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{N}_2 = \mathfrak{N}_3 = \mathfrak{N}_4$.

Démonstration. On remarque que tout les $\mathfrak{N}_i, i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$, sont finis, en vertu du Théorème 9.1 On procède en établissant des inégalités :

$\mathfrak{N}_1 \leq \mathfrak{N}_2$: Soit $x \in E, x \neq 0$. Alors $y = x/\mathbf{n}_E(x)$ est tel que $\mathbf{n}_E(y) = 1$. Donc,

$$\frac{\mathbf{n}_F(f(x))}{\mathbf{n}_E(x)} = \mathbf{n}_F\left(\frac{f(x)}{\mathbf{n}_E(x)}\right) = \mathbf{n}_F(f(y)) \leq \sup_{\mathbf{n}_E(z)=1} \mathbf{n}_F(f(z)) = \mathfrak{N}_2. \quad (9.4)$$

Un passage au supremum fournit l'inégalité souhaitée.

$\mathfrak{N}_2 \leq \mathfrak{N}_3$: Immédiat par définition du supremum, car $\{x \in E \mid \mathbf{n}_E(x) = 1\} \subset B_E(0_E, 1)$.

$\mathfrak{N}_3 \leq \mathfrak{N}_4$: Par définition de \mathfrak{N}_4 on a $\mathbf{n}_F(f(x)) \leq \mathfrak{N}_4\mathbf{n}_E(x)$ pour tout $x \in E$. En particulier, si $x \in B_E(0_E, 1)$, ceci donne $\mathbf{n}_F(f(x)) \leq \mathfrak{N}_4$. Un passage au supremum fournit l'inégalité souhaitée.

$\mathfrak{N}_4 \leq \mathfrak{N}_1$: Pour tout $x \in E, x \neq 0_E$ on a

$$\mathbf{n}_F(f(x)) = \frac{\mathbf{n}_F(f(x))}{\mathbf{n}_E(x)}\mathbf{n}_E(x) \leq \sup_{y \in E \setminus \{0_E\}} \left[\frac{\mathbf{n}_F(f(y))}{\mathbf{n}_E(y)} \right] \mathbf{n}_E(x) = \mathfrak{N}_1\mathbf{n}_E(x) \quad (9.5)$$

Cette inégalité reste vrai aussi pour $x = 0_E$, et donc

$$\mathfrak{N}_1 \in \{k > 0 \mid \mathbf{n}_F(f(x)) \leq k\mathbf{n}_E(x) \quad \forall x \in E\}. \quad (9.6)$$

Ceci implique l'inégalité souhaitée, par définition de \mathfrak{N}_4 . \square

Ce résultat justifie la notion suivante.

Définition 9.2. Pour toute $f \in L(E, F)$ on pose

$$\|f\| = \mathfrak{N}_1 = \mathfrak{N}_2 = \mathfrak{N}_3 = \mathfrak{N}_4. \quad (9.7)$$

On appel $\| \cdot \|$ la norme subordonné à la norme de E et F , ou triple norme, ou encore norme opérateur.

Théorème 9.3. *On a, avec abus de notation,*

$$L(E, F) = \{f \in \mathcal{L}(E, F) \mid \|f\| < +\infty\}. \quad (9.8)$$

De plus, $L(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E, F)$ et $\|\cdot\|$ est une norme sur $L(E, F)$.

Démonstration. La caractérisation de $L(E, F)$ suit du Théorème 9.1 et de la définition de triple norme.

Comme il est évident que $L(E, F) \neq \emptyset$, car il contient toujours l'application identiquement nulle, et que $\lambda f \in L(E, F)$ si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in L(E, F)$, pour que $L(E, F)$ soit un sev de $\mathcal{L}(E, f)$ on doit montrer seulement que $f + g \in L(E, F)$ si $f, g \in L(E, F)$. À cet effet on observe que

$$\mathbf{n}_F(f(x) + g(x)) \leq \mathbf{n}_F(f(x)) + \mathbf{n}_F(g(x)) \leq (\|f\| + \|g\|) \mathbf{n}_E(x), \quad \forall x \in E. \quad (9.9)$$

En passant au supremum pour les x tels que $\mathbf{n}_E(x) = 1$, on obtient donc $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$. Ceci montre que $\|f + g\| < +\infty$, et donc $f + g \in L(E, F)$.

On vient en effet de démontrer l'inégalité triangulaire de la triple norme, les autres propriétés sur cette norme étant aisées à vérifier. \square

On montrera dans la suite que si $\dim E < +\infty$, alors $L(E, F) = \mathcal{L}(E, F)$. On étudie d'abord quelque exemple.

Exemple 9.1. On considère une application linéaire $f : (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$, $f \neq 0$, et on se propose de calculer sa triple norme. On sait déjà que à une telle application linéaire est associé une matrice $M = (m_{ij})_{ij} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $f(x) = Mx$. On montrera que

$$\|f\| = \max_{i,j \in \llbracket 1, n \rrbracket} |m_{ij}|. \quad (9.10)$$

Pour tout vecteurs $x \in \mathbb{R}^n$, en dénotant $(f(x))_i$ la composante i -ème de $f(x)$, on a

$$\begin{aligned} |(f(x))_i| &= |(Mx)_i| = \left| \sum_{j=1}^n m_{ij} x_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |m_{ij}| |x_j| \\ &\leq \max_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket} |m_{ij}| \sum_{j=1}^n |x_j| = \|x\|_1 \max_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket} |m_{ij}|. \end{aligned} \quad (9.11)$$

Par conséquent,

$$\|f(x)\|_\infty = \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} |(f(x))_i| \leq \|x\|_1 \max_{i,j \in \llbracket 1, n \rrbracket} |m_{ij}| \implies \|f\| \leq \max_{i,j \in \llbracket 1, n \rrbracket} |m_{ij}|. \quad (9.12)$$

Pour montrer que l'inégalité ci-dessus est en effet une égalité on cherche donc $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|\bar{x}\|_1 = 1$ et $\|f(\bar{x})\|_\infty = \max_{i,j \in \llbracket 1, n \rrbracket} |m_{ij}|$. En effet, si un tel \bar{x} existe, on a

$$\|f\| = \sup_{\|x\|_1=1} \|f(x)\|_\infty \geq \|f(\bar{x})\|_\infty = \max_{i,j \in \llbracket 1, n \rrbracket} |m_{ij}|. \quad (9.13)$$

Ceci, avec (9.12), donne (9.10).

Soient $i_0, j_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tels que $\max_{i,j \in \llbracket 1, n \rrbracket} |m_{ij}| = |m_{i_0, j_0}|$. En particulier, comme $f \neq 0$, on a $|m_{i_0, j_0}| > 0$. On pose $\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ donné par

$$\bar{x}_i = \begin{cases} 1, & \text{si } i = i_0, \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases} \quad (9.14)$$

On a que $\|\bar{x}\|_1 = 1$ et

$$|(f(\bar{x}))_i| = |m_{i, j_0}| \implies \|f(\bar{x})\|_\infty = \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} |m_{i, j_0}| = |m_{i_0, j_0}|. \quad (9.15)$$

Par définition de (i_0, j_0) ceci montre que $\|f(\bar{x})\|_\infty = \max_{i,j \in \llbracket 1, n \rrbracket} |m_{ij}|$.

Exemple 9.2. Soit $g \in C([0, 1])$. Considérons l'application $\Phi : (C([0, 1]), \|\cdot\|_2) \rightarrow (C([0, 1]), \|\cdot\|_1)$ donnée par

$$\Phi[f](x) = g(x)f(x), \quad \forall f \in C([0, 1]). \quad (9.16)$$

Est évident que $\Phi \in \mathcal{L}(C([0, 1]), C([0, 1]))$. Montrons que elle est continue et calculons sa triple norme.

Soit $f \in C([0, 1])$. En vertu de l'inégalité de Hölder (Lemma 2.3) étendue au fonctions continue, si on pose $q = 2$ on a

$$\begin{aligned} \|\Phi[f]\|_1 &= \int_0^1 |\Phi[f](x)| dx = \int_0^1 |g(x)f(x)| dx \\ &\leq \left(\int_0^1 |g(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_0^1 |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} = \|g\|_2 \|f\|_2. \end{aligned} \quad (9.17)$$

Cela prouve donc que $\|\Phi\| \leq \|g\|_2$ et, en particulier, que Φ est continue.

Comme dans l'exemple précédent, pour montrer que en effet $\|\Phi\| = \|g\|_2$, on cherche $f_0 \in C([0, 1])$ telle que $\|\Phi[f_0]\|_1 = \|g\|_2$. À cet effet, il nous suffit de poser $f_0 = g$, car on obtient

$$\|\Phi[g]\|_1 = \int_0^1 |g(x)|^2 dx = \|g\|_2^2. \quad (9.18)$$

Exemple 9.3. On considère l'espace des polynômes $\mathbb{R}[x]$ avec la norme $\|\cdot\|_\infty$, et on fixe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $|x_0| < 1$. Considérons l'application $f : (\mathbb{R}[x], \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$ définie par

$$f(P) = P(x_0), \quad \forall P \in \mathbb{R}[x]. \quad (9.19)$$

On démontrera que f est continue en calculant :

$$\|f\| = \frac{1}{1 - |x_0|} < +\infty \quad (9.20)$$

Soit $P \in \mathbb{R}[x]$ s'écrivant sous la forme $P(x) = \sum_{n=0}^{\deg P} a_n x^n$. On rappelle que $\|P\|_\infty = \max_{i \in \llbracket 1, \deg P \rrbracket} |a_i|$. On a donc,

$$|P(x_0)| = \left| \sum_{n=0}^{\deg P} a_n x_0^n \right| \leq \sum_{n=0}^{\deg P} |a_n| |x_0|^n \leq \|P\|_\infty \sum_{n=0}^{\deg P} |x_0|^n \leq \|P\|_\infty \sum_{n=0}^{+\infty} |x_0|^n = \frac{\|P\|_\infty}{1 - |x_0|}.$$

Ceci montre que $\|f\| \leq 1/(1 - |x_0|)$ et, en particulier, que f est continue.

On se propose maintenant de montrer (9.20). Contrairement aux deux exemples précédents, ici on peut pas trouver¹ \bar{P} tel que $|\bar{P}(x_0)| = 1/(1 - |x_0|)$. Donc, on trouvera une suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ telle que $\sup_n |P_n(x_0)| = 1/(1 - |x_0|)$ et $\|P_n\|_\infty = 1$. En effet, ceci montrera que

$$\|f\| = \sup_{\|P\|_\infty=1} |P(x_0)| \geq \sup_{n \in \mathbb{N}} |P_n(x_0)| = \frac{1}{1 - |x_0|}. \quad (9.21)$$

Pour ce propos, on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \varepsilon_k x^k \quad \text{ou} \quad \varepsilon_k = \begin{cases} 1 & \text{si } x_0^k > 0, \\ 0 & \text{si } x_0^k = 0, \\ -1 & \text{si } x_0^k < 0. \end{cases} \quad (9.22)$$

On a donc $\|P_n\|_\infty = 1$ et

$$f(P_n) = \sum_{k=0}^n \varepsilon_k x_0^k = \sum_{k=0}^n |x_0|^k > 0. \quad (9.23)$$

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $|f(P_n)| = \sum_{k=0}^n |x_0|^k$. Un passage à la limite montre que $\sup_n |f(P_n)| = 1/(1 - |x_0|)$.

On montre maintenant un résultat fortement lié au Théorème 6.16.

Théorème 9.4. *On a que $L(E, F) = \mathcal{L}(E, F)$ si et seulement si $\dim E < +\infty$.*

Démonstration. Supposons que $\dim E < +\infty$ et considérons $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Soit $\{e_1, \dots, e_n\} \subset E$ une base quelconque. Donc $x \in E$ s'écrit $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ pour $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Ceci donne

$$\mathbf{n}_F(f(x)) = \mathbf{n}_F\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \mathbf{n}_F(e_i) \leq \|x\| \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \mathbf{n}_F(e_i), \quad (9.24)$$

où $\|\cdot\|$ est la norme définie par (6.25), dans la preuve du Théorème 6.17. En particulier, en vertu de ce théorème, il existe $C > 0$ tel que $\|x\| \leq C \mathbf{n}_E(x)$, et donc

$$\|f\| \leq C_1, \quad \text{où} \quad C_1 = C \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \mathbf{n}_F(e_i) \in (0, +\infty). \quad (9.25)$$

Ceci implique que $f \in L(E, F)$.

1. Réfléchir à pourquoi.

Supposons maintenant que $\dim E = +\infty$ et construisons $f \in \mathcal{L}(E, F)$ non continue. Dans ce cas, il existe une famille libre $(e_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ tel que $\|e_n\| = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On décompose donc $E = V \oplus W$ où²

$$V = \text{vec}\{(e_n)_{n \in \mathbb{N}}\} = \left\{ \sum_{n=1}^N \alpha_n e_n \mid N \in \mathbb{N}, \alpha_n \in \mathbb{R} \right\}, \quad (9.26)$$

et W est un quelconque supplémentaire de V dans E (éventuellement $W = \emptyset$). On fixe aussi $v \in F$, $\mathbf{n}_F(v) = 1$ et on définit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ en posant $f(e_n) = nv$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $f|_W \equiv 0$. C'est-à-dire, comme $x \in E$ se décompose en $x = \sum_{n=1}^{N_x} \alpha_n e_n + x_W$ où $x_W \in W$,

$$f(x) = \left(\sum_{n=1}^{N_x} n \alpha_n \right) v \in F. \quad (9.27)$$

On a donc,

$$\|f\| \geq \sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{n}_F(f(e_n)) = \sup_{n \in \mathbb{N}} n \mathbf{n}_F(v) = \sup_{n \in \mathbb{N}} n = +\infty. \quad (9.28)$$

Ceci implique que f n'est pas continue. \square

Théorème 9.5. *Si (F, \mathbf{n}_F) est un espace de Banach, alors $(L(E, F), \|\cdot\|)$ est également un espace de Banach.*

Démonstration. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L(E, F)$ une suite de Cauchy. Alors, pour $x \in E$ on a

$$\mathbf{n}_F(f_n(x) - f_m(x)) \leq \|f_n - f_m\| \mathbf{n}_E(x). \quad (9.29)$$

On déduit de cette inégalité que $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}} \subset F$ est une suite de Cauchy dans (F, \mathbf{n}_F) . Par conséquent, elle est convergente et on note $f(x) \in F$ sa limite. Il faut maintenant montrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers la fonction $f : E \rightarrow F$, ainsi définie, par rapport à la norme $\|\cdot\|$ et que $f \in L(E, F)$.

Le fait que f soit linéaire (i.e., $f \in \mathcal{L}(E, F)$) découle tout simplement en passant à la limite dans la définition de linéarité pour f_n , $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \forall x, y \in E, \quad f_n(\lambda x + \mu y) = \lambda f_n(x) + \mu f_n(y). \quad (9.30)$$

Montrons que $\|f_n - f\| \rightarrow 0$ pour $n \rightarrow +\infty$. Car $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy, on a que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{t.q.} \quad \|f_n - f_{n+p}\| \leq \varepsilon \quad \text{si} \quad n \geq N, p \in \mathbb{N}. \quad (9.31)$$

Mais alors, pour ces valeurs de n, p , pour tout $x \in E$ on a

$$\mathbf{n}_F(f_n(x) - f_{n+p}(x)) \leq \varepsilon \mathbf{n}_E(x). \quad (9.32)$$

2. On rappelle que l'espace engendré par une famille infinie \mathcal{F} de vecteurs est obtenu en considérant toutes les combinaisons linéaires possibles avec un nombre finie d'éléments de \mathcal{F} . En effet, une combinaison linéaire avec un nombre infinie de vecteurs ne peut pas être définie sans donner un concept de convergence de série, ce qui demande une norme.

Un passage à la limite pour $p \rightarrow +\infty$, montre que $\mathbf{n}_F(f_n(x) - f(x)) \leq \varepsilon \mathbf{n}_E(x)$ pour tout $x \in E$ et $n \geq N$. Autrement dit,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{t.q.} \quad \|f_n - f\| \leq \varepsilon \quad \text{si} \quad n \geq N. \quad (9.33)$$

Donc, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\| = 0$.

Pour terminer, montrons que f est bien continue. Mais on a

$$\|f\| \leq \|f_n - f\| + \|f_n\|. \quad (9.34)$$

Or, le premier terme à droite est assez petit qu'on veut, tandis que $\|f_n\| < +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ car $f_n \in L(E, F)$. Ceci montre que $\|f\| < +\infty$ et donc $f \in L(E, F)$. \square

9.1 Exercices

Exercice 9.1. Montrer que si $f : (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ est linéaire et tel que $f(x) = Mx$ pour $M = (m_{ij})_{ij} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a

$$\|f\| = \max_{i \in [1, n]} \sum_{j=1}^n |m_{ij}|. \quad (9.35)$$

Qu'est-ce qu'on peut dire si on considère $f : (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_q)$, $p, q \in [1, +\infty]$?

Exercice 9.2. Montrer que l'application définie dans l'exemple 9.3 n'est pas continue lorsque $|x_0| = 1$.

Exercice 9.3. Considérons l'espace vectoriel $C^\infty([0, 1])$ des fonctions $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tels que $\frac{d^n}{dx^n} f \in C([0, 1])$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout norme \mathbf{n} , l'application linéaire $D : (C^\infty([0, 1]), \mathbf{n}) \rightarrow (C^\infty([0, 1]), \mathbf{n})$ définie par $Df = f'$ n'est pas continue.

Exercice 9.4. Considérons l'application $\Phi : (C([0, 1], \|\cdot\|_1) \rightarrow (C([0, 1], \|\cdot\|_1)$ définie par

$$\Phi[f](x) = \int_0^x f(t) dt, \quad \forall x \in [0, 1]. \quad (9.36)$$

Montrer que $\Phi \in L(E, F)$ et calculer $\|\Phi\|$.

Bibliographie

- [1] K. Aguilar. *A course in metric spaces assuming basic analysis*.
https://math.la.asu.edu/~kaguilar/MAT472/metric_spaces_k_aguilar_c.pdf
- [2] K. Conrad *Spaces that are connected but not path-connected* <https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/topology/connnotpathconn.pdf>
- [3] A. Kolmogorov et S. Fomine *Éléments de la théorie de fonctions et de l'analyse fonctionnelle* Éditions MIR-Moscou, 1973.
- [4] Y. Privat. *Espaces Vectoriels Normés et Topologie*.
<https://w3.ens-rennes.fr/math/people/yannick.privat/documents/polyCPP.pdf>